高等学校教材

高 等 数 学

（上册）

张世禄　陈友军　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

教材将高等数学中的算法按所解决的问题作了全面地、系统地、准确地分类。给出了各类问题所用的通用计算公式和通用计算过程，使算法和问题的关系由 M 对 N 变成 1 对 1，这样教师可一类一类地讲，学生可一类一类地学，从而降低了教学难度和学习难度。书中给出了一些新算法，用新算法解题快速、简捷，有些问题流行（数学）软件无法解，有些问题流行软件虽能解，但给出的结果相当麻烦，而用书中提供的算法只需 3～5 个等式。

本书分上、下两册，共计 16 章，约 70 万字，全书内容丰富，文字精炼，层次清楚，对于“计算”有独到之处。本书可作为重点高校、普通高校教材，也可作为高职教材，本书可作为考研数学指南。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/张世禄，陈友军主编．—北京：电子工业出版社，2010.8

ISBN 978-7-121-11493-9

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①张…　②陈…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 148041 号

策划编辑：王赫男
责任编辑：谭海平
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×980　1/16　印张：15　字数：324 千字
印　　次：2010 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：4 000 册　定价：29.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

序

数学分析和高等数学是高等院校理、工、农、医、财经、管理等专业的必修课．数学分析和高等数学的主要内容是微分和积分，不妨将数学分析和高等数学称为微积分学．

数学是研究量的关系和空间形式的一门学科，微积分学主要研究量的关系．数学中的量与关系都是高度抽象的产物．在数学中，即使像“1 个人 +1 个人 =2 个人”、“3 个苹果+ 4 个苹果 = 7 个苹果”这样简单的算式，都是高度抽象的结果，算式中的人没有性别、年龄、身高、体重……之分，更不会考虑人的学历、素质；同样，苹果也不会考虑大小、颜色、重量……这两个算式最后还将简化成“$1+1=2$”和“$3+4=7$”．微积分学中量之间的关系及所有算式，都是经简化和抽象后归纳出来的，简化和抽象后才便于找出数学本质，便于用数学语言表述，这样的工作经过众多数学家之手，最后由牛顿－莱布尼兹完成（恩格斯：《自然辩证法》第 271 页）．数学也是应用最广泛的一门学科，所有自然科学都离不开数学，离开了数学也就没有当代的社会科学．

数学中的计算分为理论推演计算和实际计算．理论计算结果最多是理论解，世界上只存在理论解而不存在准确解，例如，

$$S(R)=\pi R^2$$

这样简单的算式，虽然给了一个理论值，但计算结果一定和实际结果有差异，原因是实际计算时 π 只能取近似值； R 是测量值，测量值难免会有测量误差；即使 π 取理论值， R 的误差为 0，算得的值也和实际问题有差异，因为世界上不存在理论上的几何圆．实际上，理论计算推演的是量的关系，它用一系列等式表示推演过程，将由高等数学表述的算式变成用初等数学表述的等价算式，这类计算得到理论解，理论解就是和算式中最左端的变量或函数完全一致的解．另一类计算是应用计算，应用计算只能追求满意解，所谓满意解，就是在误差范围内的解或者是在误差限内的解．本书含数学实验，数学实验的所有计算都要求满意解，在求满意解时圆面积的计算公式就变成

$$S(R)=\frac{22}{7}R^2 \quad 或 \quad S(R)=\frac{355}{113}R^2$$

在计算满意解时，若遇到测量值，则不是让其值愈精确愈好，而是满足实际问题所给出的误差限就行．若上面的算式表示的是圆桌面积，则 R 的值只须用木匠的卷尺测量就行，若用光学仪器去测，只会徒增其成本！若算式中涉及符号常量，则其取值应和测量值的精度一致．

微积分学经牛顿－莱布尼兹完成之后已达数世纪，中外有关教材已不胜枚举，但不少学生仍感到微积分是最难学的学科，因此不少人将之归于它的抽象性．的确，抽象的东西比具体的东西难学，实际上“一切科学的抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然．”（列宁：《黑格尔逻辑学》）．抽象不是难学的根本原因．微积分学教材中不是每章都难学，例如

书中的“微分”部分就易学，原因是微分部分理论上解决得彻底，分门别类地给出了各种情况下的导数计算公式：直接从导数表就可查到各初等函数的导数；分别给出了函数的和、差、积、商导数计算通用算式；给出了复合函数的导数计算公式．相反，极限、不定积分、常系数常微分方程等学生学起来就感到困难．为师之道，授之以渔．渔不仅仅是捕鱼的工具、捕鱼技术，首先须对鱼分类，捕鱼技术不是泛泛地指捕所有鱼的技术，捕鱼工具也不是指捕各种鱼的工具，万能的捕鱼技术和捕鱼工具是没有的，即使有，操作使用时也是极不方便的，掌握的困难程度也是极大的．捕海鱼的网和捕池塘中的鱼的网是不一样的，钓七星鱼和钓鲫鱼的鱼饵与钓钩也是不同的．微分部分易学的原因是，所有教材都对导数计算做了完整的、无遗漏的、准确的分类，并给出了步骤分明的通用计算公式．微积分学的其他内容及其他计算能否也做到这一点呢？答案是肯定的．本教材彻底解决了这一问题．其他教材不对问题分类，不给出各类问题的通用计算公式，即使书中算例连篇，最多也只能算是教师和书本授给了学生大量的鱼，学生学习目标仍然不明，教师教学目标也不明，徒增学生的畏难情绪．相反，本书将各章节所涉及的算法完整、准确地分成了各个子类，并给出了各子类的通用计算公式，教师教学目标明确，学生学习目标明确，加上所有计算都是套公式，既降低了教学难度，又降低了学习难度．

因材施教是孔圣人示范的、得到教育界公认的最好教育方法和教育思想．自主学习是现代教育家得出的最有效的学习方式．然而，学生多、课程多、教师少，要真正做到因材施教非常难，教案是固定的，教材是死的，自主学习谈何容易．教师是教师，书本也是教师，书本是和学生接触时间最长且有着一对一关系的教师，但是文字教材是死的，为了实现因材施教和自主学习，教材必须是活的，这就需要一个与教材配套的、内容可增减的、带智能的软件系统，并且该系统应当能按照类别自动给出算例的计算过程和注释，这是现在所有国内外数学软件所不具有的功能．微积分学的理论部分已由牛顿－莱布尼兹完成，从 18 世纪到 21 世纪已经经历了 300 多年，中外教科书已经出了不少，定义、定理部分无须做大的变动，但习题和算例则不能固定，学生可根据自己的条件和专业增减，软件则可按教师或学生的需要增加带详细计算过程且能做说明和注释的算例，或增加学生需要的习题．

微积分也是应用相当广的数学工具，本书将增加数学实验与之配套，有关数学实验的内容和意义将在相应部分介绍．

2010 年 5 月

前　　言

高等数学是所有理工科学生的必修课，也是财经、管理专业学生的必修课．有些高校文秘专业也开设了高等数学课．作为众多学科的基础，高等数学的重要性早已得到世人公认．

高等数学是最古老的学科之一，自牛顿－莱布尼兹完善了高等数学之后，几百年中不少中外学者编写了数以千计的教材．有的学者认为，高等数学教材的内容已相当完善，没有重大变革的需要，难以进行重大变革．

高等数学是一门内容丰富的学科，也是一门涉及算法和算式最多的学科．需要特别指出的是，高等数学中，同一问题可以用多个算法解决，一个算法又可以解决多个问题，问题和算法之间的关系是 M 对 N 的．不少章节中给出问题后，需要什么算法才能解决该问题并不确定，即使你记牢了所有计算公式，也未必就能解出其中的难题．因此，高等数学的教学难度大，学生的学习难度也大．即使是考上硕士研究生的学生，高等数学成绩大多也未及格，且国家下达的分数线离及格线还差了很多．因此，高等数学的教材变革很有必要．

正因为高等数学是一门最古老的基础课，中外教材又不少，所以长期深入研究教材的人并不多．最近出版的教材的主要差别体现在例题和习题上，未见有重大变革的教材．我们对高等数学教材进行了长达十年的潜心研究，将章节所涉及的问题和算法做了全面、系统、准确的分类，给出了各类问题的通用计算公式和通用计算过程．新教材的各章节和微分学中一样，把算法的类和问题的类紧密结合，使算法和解决问题的关系不再是 M 对 N 的，而是一对一的，教师可按一类一类问题地教，学生可按一类一类问题地学，从而大大地降低了教和学的难度．例如，对于不定积分中的分部积分法，我们将分部积分法基础公式

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

改写成

$$\begin{cases}\int f(x)\mathrm{d}x=\int u_0(x)v_0(x)\mathrm{d}x \\ \qquad\qquad\ =u_0(x)v_1(x)-\int v_1(x)\mathrm{d}u_0(x) \\ \qquad\qquad\ =u_0(x)v_1(x)-\int v_1(x)u_1(x)\mathrm{d}x \\ \qquad\qquad\ =\sum\limits_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}u_{i-1}(x)v_i(x)+(-1)^k\int u_k(x)v_k(x)\mathrm{d}x \\ v_i(x)+C=\int v_{i-1}(x)\mathrm{d}x \\ u_i(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u_{i-1}(x)\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,k$$

并由此得出了使用分部积分法的必要条件为

$$v_i(x)+C=\int v_{i-1}(x)\mathrm{d}x\text{，}\quad i=1,2,\cdots,k+1\,.$$

而充分条件为：

1．存在 k，有 $u_k'(x)=a$，此时

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}u_{i-1}(x)v_i(x)+C\text{；}$$

2．存在 k，有 $u_k(x)v_k(x)=au_0(x)v_0(x)$，$a\neq 0$，此时

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}u_{i-1}(x)v_i(x)}{1+a}\text{；}$$

3．存在 k，$\int u_k(x)v_k(x)\,\mathrm{d}\,x$ 满足充分条件 1 或充分条件 2.

满足必要条件 1 和充分条件 1 的被积函数有两类：

（1）$(ax+b)^u\ln^m(ax+b)$，$u_0(x)=\ln^m(ax+b)$，$v_0(x)=(ax+b)^u$；其中 u 为实数，m 为整数.

（2）$(ax+b)^k v(x)$，$v_0(x)=(ax+b)^k$，$v_0(x)$ 可以是指数函数，也可以是正弦函数、余弦函数、双曲正弦函数、双曲余弦函数.

例 1　计算 $\int\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解　取 $v_0(x)=\frac{1}{x^2}$，$u_0(x)=\ln^2 x$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x&=-\frac{\ln^2 x}{x}+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}\ln^2 x\\&=-\frac{\ln^2 x}{x}+\int 2\frac{1}{x^2}\ln x\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2}{x}\ln x+\int\frac{2}{x}\mathrm{d}\ln x\\&=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2}{x}\ln x+\int 2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C.\end{aligned}$$

例 2　计算 $\int x^2\sin(2x+\pi/3)\mathrm{d}x$.

解　取 $u_0(x)=x^2$，$v_0(x)=\sin(2x+\pi/3)$，则

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(2x+\pi/3)\mathrm{d}x&=-\frac{x^2}{2}\cos(2x+\pi/3)+\int x\cos(2x+\pi/3)\mathrm{d}x\\&=-\frac{x^2}{2}\cos(2x+\pi/3)+\frac{x}{2}\sin(2x+\pi/3)-\int\frac{1}{2}\sin(2x+\pi/3)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=-\frac{x^2}{2}\cos(2x+\pi/3)+\frac{x}{2}\sin(2x+\pi/3)+\frac{1}{4}\cos(2x+\pi/3)+C.$$

满足充分条件 2 及必要条件 2 的被积函数也只有两类：

（1）指数函数和正弦函数的乘积，正弦、余弦函数和双曲正弦、余弦函数的乘积，指数函数和双曲正弦、余弦函数的乘积.

注：此时 $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 可任取其中一个. 另外，正弦、余弦函数本身的乘积，双曲正弦、余弦函数的乘积及指数函数 e^{ax} 和 $\sinh ax$，$\cosh ax$ 的乘积属本类积分，但可用更简单的积分处理，故这里不予考虑.

（2）$f(\ln x)$，f 可以是指数函数，可以是正弦、余弦函数，也可以是双曲正弦、余弦函数.

例 3 计算 $I=\int\sinh(2x+5)\cos(3x+\pi/4)\mathrm{d}x$.

解 取 $u_0(x)=\sinh(2x+5)$，$v_0(x)=\cos(3x+\pi/4)$，则

$$\begin{aligned}I&=\int\sinh(2x+5)\cos(3x+\pi/4)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\sin(3x+\pi/4)\sinh(2x+5)-\int\frac{2}{3}\sin(3x+\pi/4)\cosh(2x+5)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}\sin(3x+\pi/4)\sinh(2x+5)+\frac{2}{9}\cos(3x+\pi/4)\cosh(2x+5)-\frac{4}{9}\int\cos(3x+\pi/4)\sinh(2x+5)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}\sin(3x+\pi/4)\sinh(2x+5)+\frac{2}{9}\cos(3x+\pi/4)\cosh(2x+5)\right)+C\\&=\frac{3}{13}\sin(3x+\pi/4)\sinh(2x+5)+\frac{2}{13}\cos(3x+\pi/4)\cosh(2x+5)+C.\end{aligned}$$

例 4 计算 $I=\int x^{\frac{1}{2}}\sin\ln x\mathrm{d}x$.

解 取 $u_0(x)=\sin\ln x$，$v_0(x)=x^{\frac{1}{2}}$，则

$$\begin{aligned}I&=\int x^{\frac{1}{2}}\sin\ln x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sin\ln x-\int\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\cos\ln x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sin\ln x-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\cos\ln x-\int\frac{4}{9}x^{\frac{1}{2}}\sin\ln x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以

$$I=\frac{9}{13}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sin\ln x-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\cos\ln x\right)+C=\frac{6}{13}x^{\frac{3}{2}}\sin\ln x-\frac{4}{13}x^{\frac{3}{2}}\cos\ln x+C.$$

满足必要条件 3 和充分条件 3 的被积函数也只有两类：

（1）$u_0(x)=x^k$，$v_0(x)$为满足充分条件 2 的第一类函数.

（2）$(ax+b)^k\ln(cx+d)$（a, b 不同时分别等于 c, d）.

例 5　计算 $I=\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解　令 $I_1=\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$，$I_2=\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$，则

$$I_1=\mathrm{e}^x\sin x-\int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\cos x-\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$$

所以

$$I_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\left(\sin x-\cos x\right)+C_1$$

$$I_2=\mathrm{e}^x\cos x+\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x+I_1$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x\\&=xI_1-\int I_1\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2\\&=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x+C.\end{aligned}$$

例 6　计算 $I=\int (x+5)^2\ln x\mathrm{d}x$.

解　取 $u_0(x)=\ln x$，$v_0(x)=(x+5)^2$，则

$$\begin{aligned}I&=\int (x+5)^2\ln x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}(x+5)^3\ln x-\int\frac{x^3+15x^2+75x+125}{3x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}(x+5)^3\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{5x^2}{2}-25x-\frac{125}{3}\ln x+C.\end{aligned}$$

先用分部积分法再用换元法的被积函数也有三类：

（1）$x^k f(x^{\frac{1}{p}})$，其中 p 为整数；k 是 $\frac{1}{p}$ 的整数位；f 为指数函数，也可以是正弦、余弦函数，还可以是双曲正弦、余弦函数，这类积分算式较长；

（2）$x^k f(x^{\frac{q}{p}})$，其中 $p>q$，p 和 q 为正数；$k+\frac{p-q}{p}=m\frac{q}{p}$，$m$ 为整数；

（3）反三角函数、反双曲函数.

例 7　计算 $I=\int \mathrm{e}^{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$.

解　若被积函数是一复合函数，从基本积分表中又找不到原函数，则只有先用分部积分

法，且取$v_0(x)=1$，$u_0(x)$为复合函数本身.

$$I=\int e^{x^{\frac{1}{2}}}dx=xe^{x^{\frac{1}{2}}}-\int\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{1}{2}}}dx$$

令

$$y=x^{\frac{1}{2}}，\quad dy=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx，\quad dx=2ydy .$$

所以

$$\int x^{\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int 2y^2e^y dy .$$

上式可用分部积分法积分.

第三类一般书中都有介绍，只是没有明确提出来，这里不再举例.

书中对第一换元法做了准确描述，指出第一换元法是将被积函数的一部分作为中间变量，通过凑微分将被积函数转换成：

（1）基本积分表（不是积分表）中的函数；

（2）可用分部积分法积分的函数；

（3）有理函数.

给出了哪些类函数可转换成（1）；哪些类函数可转换成（2）；哪些类函数可转换成（3）.

对于第二换元法也做了类似工作，指出第二换元法是将被积函数的自变量作为中间变量，将被积函数转换成三角函数、双曲函数再积分. 在第二换元法中特别增加了正切变换和双曲余切变换，降低了积分难度.

在混合积分一节中，指出了哪些类函数可先用第一换元法再用分部积分法，哪些类函数可先用分部积分法再用第一换元法……

新教材中第一换元法和混合积分法的有些类问题和算法是本书特有的，也是流行数学软件没有考虑到的. 新教材中不再给出数量过百的积分表.

书中还提供了不少其他文献和教材鲜见的技巧，下面是所给技巧（也可以说是算法）之一.

在极限计算中，我们强调使用内容全新的等价替换，下面是对$(\sqrt{\infty}-\sqrt{\infty})\sqrt{\infty}$型极限公式和步骤的示例.

例 8 计算$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^{12}+x^{11}+8x^9+x^4+100}-\sqrt[3]{x^{12}+x^{11}+8x^9+x^3+5x})(x^4+\sqrt{x}+100)$.

所给计算公式和计算过程为：

（1）作等价替换

用$x^{12}+x^4$代替$f_1(x)=x^{12}+x^{11}+8x^9+x^4+100$；

用$x^{12}+0\times x^4$代替$f_2(x)=x^{12}+x^{11}+8x^9+x^3+5x$；

用x^4代替$f_3(x)=x^4+\sqrt{x}+100$；

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^{12}+x^{11}+8x^9+x^4+100}-\sqrt[3]{x^{12}+x^{11}+8x^9+x^3+5x})(x^4+\sqrt{x}+100)$

$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^{12}+x^4}-\sqrt[3]{x^{12}})x^4.$$

（2）脱根式

将上式右端乘以

$$\frac{(x^{12}+x^4)^{2/3}+(x^{12}+x^4)^{1/3}(x^{12})^{1/3}+(x^{12})^{2/3}}{(x^{12}+x^4)^{2/3}+(x^{12}+x^4)^{1/3}(x^{12})^{1/3}+(x^{12})^{2/3}}$$

得

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\times x^4}{(x^{12}+x^4)^{2/3}+(x^{12}+x^4)^{1/3}(x^{12})^{1/3}+(x^{12})^{2/3}}.$$

（3）第二次等价替换（可和脱根式一并进行）

用 $k(f^*(x))^{\frac{k-1}{k}}=3(x^{12})^{2/3}=3x^8$ 替换上式的分母.

（4）按 $\frac{\infty}{\infty}$ 极限算式计算极限

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^8}{3x^8}=\frac{1}{3}.$$

整个极限计算中广泛使用了各种等价替换，大大简化了计算难度.

本书在关于极限、不定积分、定积分及常微分方程的各章中增添了一些新类型、新算例、新习题及计算方法. 按书中提供的算法和计算过程，我们只需在五个等式之内就可得到答案，且所有的新类型、新算例丰富和拓展了高等数学的内容. 不少算例和习题使用本书中提供的算法要比使用现行教材所提供的算法简单、方便，而且有规律可循，单就不定积分中分部积分法而言，上面打框的类型，数学软件或者无法处理，或者乱算，或者结果相当烦琐.

新教材对有些提法做了修正和注释，例如在解析几何一章中，我们将自由向量定义成只考虑起点和终点的相对位置而不考虑起点和终点的绝对位置的向量，修正了不考虑起点和终点的向量称为自由向量之说. 前面所介绍的第一、第二换元法的换元途径是本书所加注释.

本书可作为学生自主学习的教材和考研指南.

本书是我们正在研制的数学实验软件和自主学习系统的理论依据和基础.

全书由张世禄和陈友军主编，成书和出版得到了西华师大数学与信息学院数学分析教研室主任王庆平先生，高等数学教研室主任郑映畅先生、袁秀萍先生的不少帮助，得到了西华师大教务处、教材中心、数学与信息学院领导的帮助和支持，这里特以致谢.

书中有些算法技巧源于原中国科技大学教师（现为青岛大学退休教授）邵品琮先生，有些算法和技巧是我在大学期间和王先信、黄黔同学讨论的结果，这里也特以致谢.

张世禄　陈友军

2010 年 5 月于南充

目　录

第 1 章　函　　数

数学是研究量的关系和空间形式的科学．高等数学上册主要介绍微积分．微积分学主要研究量的关系，数学分析是研究量之间关系的方法，不少教材干脆把“数学分析”作为教材名．

数学中量之间的关系通过函数来体现，或者说函数反映量之间的关系．

1.1　函数

函数是常量、变量和各种运算符的有序组合，函数本身就是一种运算．量之间的关系是通过各种运算体现的．

1.1.1　常量与变量

在观察自然现象和技术过程中，人们会遇到不少量，其中有些量在过程进行中不会变化，有些量则会变化．在所描述的过程中值不变化的量，称为常量，而值发生变化的量则称为变量．

常量分为数字常量和符号常量．顾名思义，数字常量就是用数字表示的常量，而符号常量则是用英文字母（有时也带下标）或希腊字母表示的常量．通常符号常量都具有一定的物理意义和数学意义．

例 1　计算圆面积时可使用公式

$$S=\frac{\pi}{4}d^2 \tag{1-1}$$

上式中 S 表示面积，π 代表圆周率，d 表示圆的直径.

例 2　物体从距地面为 h_0 的高度自由落下，计算 t 时刻物体距地面的高度 h.

根据自由落体的运动规律，h 和 t 满足关系

$$h=h_0-\frac{1}{2}gt^2 \tag{1-2}$$

其中 g 为重力加速度.

例 3　按牛顿万有引力定律，两个质量分别为 m 和 M 的物体（质点）若相距 r，则相互间的引力 F 满足

$$F=k\frac{mM}{r^2} \tag{1-3}$$

其中 k 是万有引力常数.

例 4　电流所产生的热量决定于电压 E、电流 I 和时间 t，且满足

$$Q = 0.24EIt \tag{1-4}$$

其中0.24为电能和热能之间的转换系数.

例 5 把质量为 1 克的冰从 -10 ℃升高到 10 ℃，物体所吸收的热量 Q 与温度 t 之间的关系为

$$Q = \begin{cases} 0.5(t-10) & -10 \leqslant t < 0 \\ t+85 & 0 \leqslant t \leqslant 10 \end{cases} \tag{1-5}$$

注：冰的比热容为 0.5 卡/克度，而溶解热为 80 卡/克度.

例 6 下面是某地 6 月份的某一天的温度与时间 t 之间的关系：

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T	21.0	20.5	20.2	20.1	20.0	20.0	20.0	20.1	20.5	21.0	22.0	22.5
t	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
T	23.0	24.0	24.5	24.0	23.5	23.5	23.0	23.0	22.5	22.5	22.0	21.5

以上各式中的数字都是数值常量，π, g, k, m, M 等是符号常量．而式（1-1）中的 d，式（1-2）中的 t，式（1-3）中的 r，式（1-4）中的 E, I 和 t，式（1-5）中的 t 及表中的 t 则是变量. 显然，当 d, t, r, E, I 等发生变化时，上述式子左端的 S, h, F, Q, T 等也会随之变化，故它们也是变量.

须指出的是，变量是绝对的，常量是相对的．式（1-1）中的 π 是一个无理数，但实际计算时只能取有限位的实数，且随问题不同其取值也不同，只是对于具体算式来说它是常量. 若 d 是一大树的“胸径”，则 π 可取 3；若 d 是一圆桌的直径，则 π 可取 3.14； g 表示重力加速度，它随离地面高度的不同而不同（离地心距离不同而不同），但在一个较小区域内，例如在成都平原，则可认为它是一个常量．把 g 取为变数，且不把物体考虑成质点，用万有引力定律求解，则所求解问题就变成三维问题，所用公式复杂而所得结果并不比式（1-2）好，原因是地球上找不到自由落体运动（物体要受空气阻力），而且 t 是一测量值，有测量误差．实际上，地球和物体都无法用三元函数准确描述！由于数字也是高度抽象后的产物，故数字本身也是相对的，例如 1 个人 $+1$ 个人 $=2$ 个人，由于世界上没有绝对相同的两个人，故也是相对的.

客观世界是不断发展变化的，一切自然现象和技术过程都可通过变量来表征．高等数学就是研究变量关系的数学课程．从上面各例可以看出，变量之间是相互依赖和相互联系的，其共同特征是：它们给出了一种对应规律，根据它，可以从一些变量所取的值确定出另一些变量的对应值．具有这种确定的依赖特征的变量间的相互关系就是函数关系.

为了掌握这种关系，必须撇开具体变量的实际意义，抽象出它们的共同特征.

【定义 1】所谓**函数**，是指一个对应规律，依照它，对于变量 x（或 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$）的某个变化范围内的每一个值（或一组值），必有变量 y 的一个确定值与之对应．常用 $y=f(x), y=g(x)$ 或 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示，符号 f 和 g 表示对应规律.

通常，我们也说变量 y 是变量 x（或变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$）的函数，但应指出的是，这种通

称不是很确切，因为实际上函数并不是指变量 y，而是指对应规律，即以符号 f 等表示的规律．在同一过程中，对于不同的对应规律即不同的函数关系，应采用不同的符号表示，如 $y_1 = f(x)$， $y_2 = g(x)$ 等．当自变量只有一个时，称为一元函数，当自变量个数大于一个时，称为多元函数．除例 4 是三元函数外，上面其余各例都是一元函数．

函数的表示法是多种多样的．一般说来，分为解析法、列表法和图示法 3 种．

1．解析法

把变量间的数学关系通过数学表达式明确表示出来的方法，称为解析表示法（解析法）．前面五个式子都是解析表示法．

依照解析表示法，对于自变量的每一个值，都可经过一系列的数学运算确定因变量的值，从这个意义上讲，函数本身就是一个综合运算．对于例 1，任给一个 d 值，计算机先计算 d^2 的值，再计算 $\dfrac{\pi}{4}$ 的值，然后两个值相乘得到 S 值；对于手算，计算顺序可根据需要自行掌握，但不能违背数学原理．这里须说明的是，可以用几个数学式子结合起来表示一个函数，这样的函数称为分段函数，例 5 就是一个分为两段表示的函数．

解析表示法把变量间的函数关系准确地、完整地表达出来，通过数学表达式深入研究函数的性质，求出相应的理论解，这种表示法在微积分学的理论研究中甚为重要，在工程技术实际应用中也有意义，微积分学中将用相当大的篇幅研究这类函数．

但这种表示法不是万能的，原因如下：

（1）不是所有函数都具有解析表示形式；

（2）有些用解析算式表示的函数运算相当复杂（例如勒让德函数），计算非常麻烦；

（3）不少问题找不到理论解，只找得到数值解．

2．列表法

这种方法就是把有限个自变量与因变量值直接用表格排列出来．从表格中可直接读出自变量值和对应的因变量值．例 6 就是用列表法表示的．

工程物理中计算定积分时，常常不用牛顿－莱布尼兹公式，而用牛顿法或高斯法求解，此时只需要有限个自变量值和所对应的函数值，即使函数是用解析式表示的，也只须取所需点及其函数值就够用了．下面是用复合梯形积分公式 $S_T = \left(\dfrac{1}{2}(f_0 + f_n) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_i\right)h$ 计算 $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 时所列出的数据表（$n = 4$, $h = 0.25$）．

X	0	0.25	0.5	0.75	1
Y	1	0.94118	0.8	0.64	0.5

在科学技术研究中，要找出变量和函数的关系，常常首先通过实验得到若干数据，制成表格，然后对这些数据进行分析和处理，从中总结和归纳出整个函数关系．因此，列表法也是重要的方法．

3．图示法

图示法就是利用解析几何中的坐标方法把变量间的函数关系用几何图形表示的方法.

有些工程物体问题、经济问题常用橘瓣图和直方图来表示函数，但这些图形与微积分都没有直接关系，这里不予介绍.

图示法常用于做定性分析，而定性分析不是本书的重点，因此这里不专门介绍图示法. 绝大多数函数都可用图示法表达，但也有例外，例如下面的迪里赫勒函数就不能用图示法表述：

$$D(x)=\begin{cases}0 & x\text{是有理数}\\1 & x\text{是无理数}\end{cases}.$$

1.1.2　函数基本知识

微积分学中只考虑实数和实变量．对于函数，无论是自变量还是函数值（因变量），都只能取实数值；此外，还须考虑具体问题的数学和物理背景，在高等数学中用定义域描述自变量的取值范围.

【定义 2】使得函数有确定意义的自变量所取值的全体称为该函数的**定义域**.

要给出一个函数，必须给出对应关系和定义域，两者缺一不可.

为了对函数定义域加以数学描述，需要引入区间的概念．凡适合不等式$a\leqslant x\leqslant b$的实数全体，称为一个闭区间，记为$[a,b]$；凡适合不等式$a<x<b$的实数全体，称为一个开区间，记为(a,b)．闭区间由开区间加上两个端点组成，由此还可引入半开区、半闭区间$(a,b]$和$[a,b)$．当a,b是有限数时，称为有限区间，$b-a$称为区间长度．除了有限区间外，还有无限区间，记号$[a,+\infty)$表示满足不等式$a\leqslant x<+\infty$的实数全体，仿此还可定义$(a,+\infty),(-\infty,b],(-\infty,b)$和$(-\infty,+\infty)$．$(-\infty,+\infty)$表示所有实数，通常用$R$表示，其他一般用$I$表示区间，且$I$可以是上述任何区间．当函数只定义在一个可充分小的开区间上时，称该区间为邻域，邻域分为空心邻域（用$U^{\circ}(x_0;\delta)$表示），它等价于$x_0-\delta<x<x_0+\delta$；以及一般邻域（用$U(x_0;\delta)$表示），它等价于$x_0-\delta<x<x_0+\delta$．也可用$U^0\left(x_0\right)$表示某一空心邻域，用$U\left(x_0\right)$表示某一邻域．据此，上节中的五个例子的完整表述应是

$$S=\frac{\pi}{4}d^2,$$

$$h=h_0-\frac{1}{2}gt^2,$$

$$F=k\frac{mM}{r^2},$$

$$Q=0.24EIt,$$

$$Q=\begin{cases}0.5T+5 & -10\leqslant T<0\\T+85 & 0\leqslant T\leqslant 10\end{cases}.$$

自变量的定义域确定后，函数的取值范围也就确定了.

【定义 3】一个函数在自变量的定义域内的所有取值，即函数值或因变量值的全体，称为**值域**.

上面 5 个函数的值域，请读者自行确定.

1.2　复合函数与反函数

1.2.1　复合函数

变量甲的值依赖于变量乙的取值，变量乙的取值又依赖于变量丙的取值……例如，飞行时气压表的读数取决于飞行高度，而飞行高度又依赖于飞行时间，即气压是高度的函数，高度又是时间的函数，气压与时间的函数关系是两个函数关系复合起来形成的．这类依赖关系在数学上抽象成复合函数.

设变量 y 是变量 x 的函数，即 $y=f(x)$，变量 x 是变量 t 的函数，即 $x=\varphi(t)$，并且设 t 在 φ 的定义域变化时，相应的量 x 不会超出函数 f 的定义域，那么对于函数 φ 的定义域中的任意数 t_0，与之对应的数 $x_0=\varphi(t_0)$ 就必然落在函数 f 的定义域中，从而有一确定的数 $y_0=f(x_0)=f(\varphi(t_0))$，这样一来，对于在函数 φ 的定义域中的每一个值 t，都有变量 y 的一个确定值与之对应. 于是 y 和 t 之间就建立起了一个对应规律，也就是说，确立了一个函数. 这个函数是 f 和 φ 复合起来的函数，记为 $y=f(\varphi(t))$，称 y 是 t 的通过 f 和 φ 复合起来的函数，简称为 y 是 t 的复合函数．按上面的假设，这个函数的定义域与函数 φ 的定义域相同．但是，若 t 在 φ 的定义域内变化时，相应的量 x 的一部分值可能会越出 f 的定义域，那么对于 x 的这一部分值就不能再有 y 的值与之对应了．因此要使复合函数完全有意义，这时就必须在 φ 的定义域中再适当地限制 t 的变化范围，使得相应的 x 的值都落在 f 的定义域中，这样一来，复合函数 $f(\varphi(x))$ 的定义域就比 $\varphi(x)$ 的定义域小了.

例 1　求 $y=\sqrt{\ln t}$ 的定义域.

解　令 $x=\ln t$，则 $y=\sqrt{x}$，即 $f(x)=\sqrt{x}$，$\varphi(t)=\ln t$；而 $\varphi(t)$ 的定义域为 $0<t<+\infty$，$f(x)$ 的定义域为 $0\leqslant x<+\infty$，解之得 $y=\sqrt{\ln t}$ 的定义域为 $t\geqslant 1$.

复合函数和普通函数并没有本质区别，可引入中间变量变普通函数成复合函数．例如，对于普通函数 $y=\sin(x^2+1)$ 就可认为它是 $y=\sin u$，$u=x^2+1$ 复合而成的函数.

简言之，复合函数就是由两个以上的对应规律复合而成的函数，复合函数中用什么符号表示自变量、中间变量和因变量无关紧要，关键在于对应关系．例如，$y=f(x)=\sin x$ 与 $y=g(x)=\ln x$，它们的自变量与因变量间对应的是两个不同的关系，若将它们复合成 $f(g(x))$，则 $y=\sin(\ln x)$，而复合成 $g(f(x))$，则 $y=\ln(\sin x)$，当然也可复合成 $g(g(x))$，此时 $y=\ln(\ln x)$ 等.

1.2.2 反函数

函数 $y=f(x)$ 给出了因变量 y 和自变量 x 的关系，在定义域内，一个 x 值对应一个确定的 y 值，但不能保证一个 y 值对应一个 x 值. 若能加上某种限制，限制一个 y 值对应一个 x 值，则按函数的定义，将这种对应关系命名为 g，则有 $x=g(y)$，称 $g(y)$ 为 $f(x)$ 的**反函数**，并记为 $f^{-1}(y)$. 注意 $f^{-1}(y)\neq\dfrac{1}{f(x)}$！鉴于用什么符号表示变量是无关紧要的，通常仍将 $f^{-1}(y)$ 记为 $f^{-1}(x)$.

例 2 求 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的反函数.

解 显然 $x=\pm\sqrt{y}$，取 $x=\sqrt{y}$，并仍用习惯符号表示函数有

$$y=\sqrt{x},\quad 0\leqslant x<+\infty.$$

取 $x=-\sqrt{y}$，并仍用习惯符号表示函数有

$$y=-\sqrt{x},\quad 0\leqslant x<+\infty.$$

从本例可看出，一个函数 $y=x^2$ 对应两个反函数 $y=\pm\sqrt{x}$，实际上 $y=\pm\sqrt{x}$ 也可认为是一个函数，不过它是个双值函数. 微积分学范畴里只研究单值函数，因此对求函数的反函数时要做一些限制和处理. 对周期函数而言，例如求 $y=\cos x$ 的反函数时，将角度限制在 $[0,\pi]$ 之间，其目的就是使反函数是唯一的.

按反函数的定义，我们很容易通过原函数的图形得到反函数的图形. 容易证明，在同一平面直角坐标系中，函数和反函数的图形是关于直线 $y=x$ 对称的，或者说把 $f(x)$ 的图形绕 $y=x$ 旋转 180° 就是 $f^{-1}(x)$ 的图形（见图 1-1），由 $y=x^2$ 的图形也很容易得到 $y=\sqrt{x}$ 的图形（见图 1-2）.

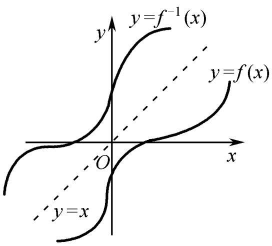

图 1-1

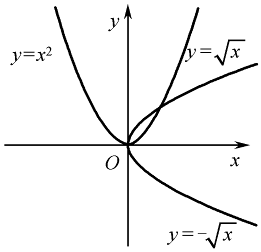

图 1-2

1.3 基本初等函数

函数实际上是常量、变量和各种运算符的有序组合. 函数本身也是一种运算符. 这里的序和运算符运算顺序有关，而不是自然顺序，微分、积分也是运算符. 也就是说，任何复杂

的函数都可通过函数和运算符组成．简单函数就是中学里已经介绍过的初等函数，也称它们为基本初等函数．微积分学中的某些运算对函数要求很严，初等函数中的多项式函数和正弦、余弦函数可进行任何运算，而任何复杂的连续函数又都可转化成多项式函数或正弦函数和余弦函数．因而初等函数在微积分中地位重要，应给予一定介绍．

1.3.1　多项式函数

多项式函数也称为有理整函数，其算式可写成

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{，} \quad -\infty < x < +\infty \tag{3-1}$$

其中 $a_i(i = 0,1,\cdots,n)$ 为常数，希腊字母∑表示累加和．对于一般的多项式函数，其图形太复杂，而单项式函数将在幂函数中介绍．

1.3.2　有理函数

两个多项式函数的商就构成了有理函数，即

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j} \text{，} \quad -\infty < x < +\infty \text{，} \quad Q_m(x) \neq 0 \tag{3-2}$$

有理函数做除法运算时，除数不能为 0，m 次多项式最多有 m 个实根．

对比式（3-1）和式（3-2）可知，多项式函数是有理函数的特列．有理函数中最简单的莫过于双曲线函数：$y = \dfrac{1}{x}$，$x \neq 0$，其图形如图 1-3 所示．

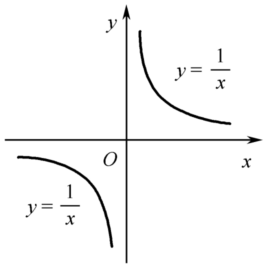

图 1-3

1.3.3　幂函数

形如 $y = x^\mu$ 的函数称为**幂函数**．

当 μ 为整数时，它是一个有理函数；当 μ 为有理分数时，如 $\mu = \dfrac{p}{q}$，且约定 $q > 0$，此时 $y = x^{\frac{p}{q}}$ 要用到开方，故若 q 是偶数则要求 $x \geqslant 0$，当 $p < 0$ 时还要求 $x \neq 0$；当 μ 为无理数时，函数相当复杂，这时约定 $x > 0$．

幂函数 $y = x^\mu$ 的图形，不管 μ 取何值都有 $x = 1$ 时 $y = 1$，也就是说，所有幂函数的曲线都通过（1,1）点，当 $\mu > 0$ 时，x^μ 随 x 的增大而增大，曲线是上升的；当 $\mu < 0$ 时，x^μ 随 x 的增大而减小，曲线是下降的；当 $\mu = 0$ 时，$y = x^\mu = 1$，其图形是一条直线．下面是比较典型

的取值情况下的幂函数图形，如图 1-4 和图 1-5 所示.

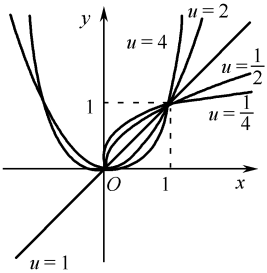

图 1-4

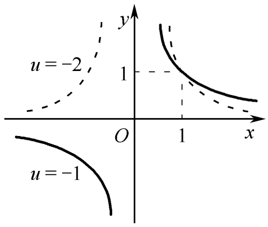

图 1-5

研究函数图像时常常要考虑对称性、奇偶性、递增性和递减性.

对称性包括轴对称和原点对称.

【定义 1】对于任何函数 $y=f(x)$，在整个定义域内，若 $f(x)=f(-x)$，则称该函数是**轴对称函数**. 轴对称函数都是偶函数.

例如，函数 $y=x^2+1$ 和 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 都是轴对称函数，其图形如图 1-6 所示.

【定义 2】对于任何函数 $y=f(x)$，在整个定义域内，若 $f(x)=-f(-x)$，则称该函数是**原点对称函数**. 原点对称函数都是奇函数.

例如，函数 $y=x^3$ 和 $y=\dfrac{1}{x^3}$ 都是原点对称函数，也都是奇函数，其图形如图 1-7 所示.

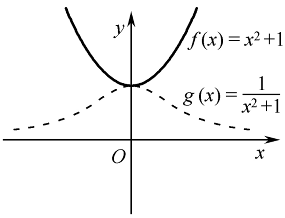

图 1-6

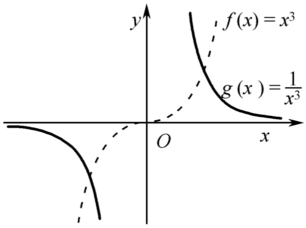

图 1-7

【定义 3】对于任何函数 $y=f(x)$，在整个定义域内，若任取 $x_1>x_2$ 时有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称该函数是**递增函数**， 特别地， 若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数为**单调递增函数**；若任取 $x_1>x_2$ 时 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称该函数是**递减函数**，特别地，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数为**单调递减函数**.

对于所有幂函数，当 $\mu>0$ 时都是单调递增函数，当 $\mu<0$ 时都是单调递减函数.

单调递增函数也称为严格递增函数，单调递减函数也称为严格递减函数.

1.3.4　指数函数

形如 $y=a^x$（$a>0$，$-\infty<x<+\infty$）的函数称为**指数函数**．一些常见的指数函数图形如图 1-8 所示．

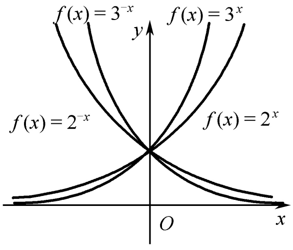

图 1-8

无论 a 取何值（但要大于 0），函数 $y=a^x$ 的图形都通过点 $(0,1)$，当 $a>1$ 时函数是单调递增的，当 $0<a<1$ 时，函数是单调递减的．同时，指数函数的函数值总是大于 0 的，又因 $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$，所以函数 $y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 的图形关于 y 轴对称．

1.3.5　对数函数

形如 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，$x>0$）的函数称为**对数函数**．常见的对数函数的图形如图 1-9 所示．

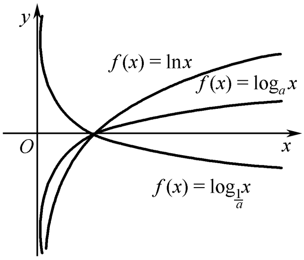

图 1-9

对数函数是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，它们的图形总是过 $(1,0)$ 点，当 $a>1$ 时函数是单调递增的，当 $0<a<1$ 时函数是单调递减的．另外，$y=\log_a x$ 与 $\log_{\frac{1}{a}} x$ 是关于 x 轴对称的．

1.3.6　三角函数

三角函数包括正弦、余弦、正切、余切、正割、余割函数六个，其解析式分别为

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=\tan x,\quad y=\cot x,\quad y=\sec x,\quad y=\csc x.$$

三角函数的共同特征是，它们都是周期函数．

【定义 4】若函数定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，只在一些离散点上可能无意义，且对于任何实数 x 存在实数 $T>0$ 使得

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足 $f(x+T)=f(x)$ 关系的最小正数 T 称为**周期**．

显然，上述六个函数满足这一定义．我们中学时已经学过：

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x$$

$$\sec(x+2\pi)=\sec x,\quad x\neq\frac{2k+1}{2}\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\csc(x+2\pi)=\csc x,\quad x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\tan(x+\pi)=\tan x,\quad x\neq\frac{2k+1}{2}\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\cot(x+\pi)=\cot x,\quad x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

按周期函数的定义可以直接得到，若 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(ax+T/a)=f(ax)$.

值得指出的是，奇函数加奇函数仍是奇函数，偶函数加偶函数仍是偶函数，两个偶函数相乘结果是偶函数，两个奇函数相乘结果是偶函数，奇函数乘偶函数则成奇函数，周期函数加周期函数不一定是周期函数，周期函数乘周期函数也不一定是周期函数，例如 $\sin(\pi x)+\sin x$ 就不是周期函数. 当两个周期函数的周期的最小公倍数是有理数时，它们的和、差、积、商才是周期函数.

由中学的数学知识可知 $\sin x=-\sin(-x)$，$\csc x=-\csc(-x)$，所以 $\sin x$ 和 $\csc x$ 是奇函数. 同样，由于 $\cos x=\cos(-x)$， $\sec x=\sec(-x)$，所以 $\cos x$ 和 $\sec x$ 是偶函数.

1.3.7 反三角函数

三角函数的反函数称为**反三角函数**，反三角函数分别为

$y=\arcsin x$， $y=\arccos x$， $y=\arctan x$， $y=\mathrm{arc}\cot x$， $y=\mathrm{arc}\sec x$， $y=\mathrm{arc}\csc x$.

由于函数与其反函数是关于直线 $y=x$ 对称的，三角函数是周期函数，所以反三角函数是多值函数，实际上只要函数的定义域不是单调的，则其反函数就不是单值函数.

微积分学不研究多值函数，对于多值函数只能取一个分支或分别取各个分支处理，对于周期函数的反函数，最多取一个周期的反函数加以讨论，其他周期的反函数的性质可通过该周期的反函数导出.

由于正弦函数是奇函数，当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，它是严格单调增的，所以通常反正弦函数是指

$$y=\arcsin x，\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

其值域称为反正弦函数的主值.

类似地，我们可以给出其他反三角函数的定义域及主值区间，这里不再赘述.

以上七类函数称为基本初等函数. 在微积分学中，除了单独研究基本初等函数外，首要的是研究这些函数经有限次和、差、积、商和有限次嵌套（复合）产生的新函数，且把这些函数仍都称为初等函数.

思　考　题

1．何谓变量？何谓常量？常量是否可视为特殊变量？

2．函数变量的本质是什么？怎样才算是给出了一个完整函数？

3．两个变量之间有关系是否就是函数关系？

4．函数关系是否一定要用数学关系表示？下式是几个函数？它的定义域如何？

$$y = f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x < 1 \\ 2x & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 4x + 8 & 2 < x \leqslant 3 \end{cases}.$$

5．何谓复合函数？复合函数是否是多变量函数？

6．为什么一个函数的反函数可能是多值的？什么情况下反函数是多值的？

7．何谓初等函数？函数 $y = (\sin\sqrt{x})^{\cos x}$ 是否是初等函数？它是由哪些基本初等函数复合起来的？

习　　题

1．一根质量非均匀分布的细棒 OB，设 M 为其上的一点，OM 的质量与 OM 的长度的平方成正比，又已知 $OM = 4$ 时 OM 的质量为 8 单位，请确定 OM 的质量与其长度间的函数关系.

2．设 $f(x) = \log_{10} x$，求 $f(1)$，$f(100)$，$f(x_0 + h)$.

3．$f(x) = \begin{cases} 1 - +x & -\infty < x \leqslant 00 \\ 2^x & 0 < x < +\infty \end{cases}$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(t)$.

4．设 $\begin{cases} 1 & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$，求 $D(1)$，$D\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$D(\sqrt{2})$，$D(\pi)$.

5．设 $g(x) = 1 + [x]$，求 $g(0.9)$，$g(0.99)$，$g(1)$.

6．设（1）$f(x) = ax + b$，（2）$f(x) = x^2$，（3）$f(x) = a^x$，求 $\varphi(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

7．设 $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x+y}$，求 $f\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

8．设 $\varphi(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$，求 $\varphi(x,x)$，$\varphi(y,x)$，$\varphi(1, \dfrac{y}{x})$，$\varphi(t,s)$.

确定并给出下列函数的定义域（9、10、11 题）.

9．（1）$y = \sqrt{x^2 - 1}$　　（2）$y = \arcsin\sqrt{2x}$

（3）$y = \dfrac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$　　（4）$y = \dfrac{1}{|x| - x}$

（5）$y = \dfrac{2x}{x^2 + 3x - 4}$　　（6）$y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

10．（1）单摆的周期与摆长间的关系为 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

（2）三角形面积 S 与两边 x，y 及其夹角 θ 之间的关系为 $S = \dfrac{1}{2}xy\sin\theta$.

11．（1）$z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$　　（2）$z = \sqrt{\sin\left(x^2 + y^2\right)}$

（3）$u=\sqrt{2az-x^2-y^2-z^2}$ （4）$u=\log(1-x^2-y^2-z^2)$

作出下列函数的图形（12、13、14 题）.

12.（1）$y=|x|$ （2）$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

（3）$y=\begin{cases}2-x^2 & |x|\leqslant 2\\ 2 & |x|>2\end{cases}$ （4）$y=|\sin 2x|$

13. $y=x-[x]$.

14.（1）$z=1-x-y$ （2）$z=x^2+y^2$

（3）$z=xy$

15. 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 用下式定义：

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases},$$

作出这个函数的图形，并证明 $|x|=x\operatorname{sgn}x$.

16. 设 $y=\sqrt{1+x^2}$， $x=\log_a t$， $t=\sin\theta$，将 y 表示成 θ 的复合函数，并确定其定义域.

17. 已知函数 $f(x)$ 在 $0<x<1$ 时有定义，求下列函数的定义域：

（1）$f(\sin x)$ （2）$f(\log_{10}x)$

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$， $F(x)=1+x^3$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$， $f(\log_a x)$， $f[f(x)]$， $f[F(x)]$， $F[f(x)]$， $f\{F[f(x)]\}$，并分别指出它们的定义域.

19. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$，求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(1)]$，$\psi[\varphi(-1)]$，$\varphi[\psi(0)]$.

20. 用几个基本初等函数表示下面的复合函数：

（1）$y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$ （2）$y=\cos^2(3x+2)$

（3）$y=3^{(x+1)^2}$ （4）$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

（5）$y=\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ （6）$y=a^{a^x}$（$a>0$）

21. 设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$，又 $x=\cos t$， $y=\sin t$，求 $F(t)=f(\cos t,\sin t)$ 并作出它的图形.

22. 设 $f(x,y)=\begin{cases}1 & y\geqslant x\\ 0 & y<x\end{cases}$，又 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$，求 $F(t)=f(\cos t,\sin t)$.

23. 设 $z=f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{y}{x}$，又 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，试把 z 表示为 r 和 θ 的函数.

24．设 $f(x,y)=x^y$，$\varphi(x,y)=x+y$，$\psi(x,y)=x-y$，求 $f\left[\varphi(x,y),\psi(x,y)\right]$，$\varphi\left[f(x,y),\psi(x,y)\right]$，$\psi\left[\varphi(x,y),f(x,y)\right]$．

25．求下列函数的反函数 $f^{-1}(x)$，并确定其定义域：

（1）$f(x)=2x+3$（$-\infty<x<+\infty$）　（2）$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$（$x\neq 1$）

（3）$f(x)=1-x^2$（$-\infty<x<+\infty$），再画出其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图形.

26．研究下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=3x-x^3$　（2）$f(x)=a^x+a^{-x}$（$a>0$）

（3）$f(x)=\sin x\sqrt{1-\cos x}$　（4）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

27．按定义研究下列函数的单调性：

（1）$f(x)=\cos 2x$（$0\leqslant x\leqslant \pi/2$）　（2）$f(x)=x^2+1$

（3）$f(x)=2^x-2^{-x}$　（4）$f(x)=1+\left[x\right]$

28．研究下列函数的周期性：

（1）$f(x)=\sin(ax+b)$　（2）$f(x)=\cos x^2$

（3）$f(x)=2\tan\dfrac{x}{2}-3\tan\dfrac{x}{3}$　（4）$f(x)=x-\left[x\right]$

第 2 章　数 列 极 限

第 1 章讨论了函数的概念，它表达了变量间的相互依赖关系．为了更深入细微地揭示函数关系的性质，就必须研究变量的变化状态，即研究自变量按某种关系变化时，因变量将按怎样的方式相应地变化，并且把变量的各种可能的变化状态分为若干类型，以便深刻地研究每一类变量变化的性质．为此，引入了一个极其重要的概念——极限．极限引入后，不但解决了当时现实世界中提出的一系列实际问题，而且积极地推动了数学理论的发展．

极限概念是高等数学的基础概念之一，在高等数学中它是深入研究函数和解决各种问题的基本思想方法．为了更便于理解并掌握极限概念，我们先讨论极限中最简单的一种——数列极限．

所谓数列，实际上是一种特殊函数，它定义在正整数集上，记为 $a_n = f(n)\ (n=1,2,\cdots)$，即

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

简记为 $\{a_n\}$．它的每个数称为数列的一个项，而 a_n 称为数列通项．例如，

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}：\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots;$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}：\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots;$$

$$\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}：\ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \cdots.$$

2.1　数列极限的概念和定义

古希腊数学家阿基米德为了由求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 所围成的面积，采用了如下办法：先将区间 $[0,1]$ 分成三等份，在抛物线下绘制两个矩形（图 2-1a 中用斜线标出的部分），计算出这两个矩形的面积和

$$s_3 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{1}{3^3}(1^2 + 2^2) = \frac{5}{27}.$$

将这一值作为图形面积的第 1 个粗略值．

再把区间 $[0,1]$ 分成 4 等份，用同样的方法作三个矩形（见图 2-1b），其面积和为

$$s_4 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{4^3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{7}{32}.$$

继续这种作法，到第 $n-2$ 步时，把区间 $[0,1]$ 分成 n 等份，作出 $n-1$ 个矩形（见图 2-1c），这些矩形的面积和为

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\ &=\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\\ &=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

这样，阿基米德得到一个数列 $\{s_n\}$：

$$s_3,s_4,\cdots,s_n,\cdots,$$

即

$$\frac{5}{27},\frac{7}{32},\cdots,\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right),\cdots$$

随着 n 的变大，直觉告诉我们，各矩形面积的和愈来愈接近所求图形的面积．实际上，随着 n 的增大，s_n 中的 $\frac{1}{n}$ 会愈来愈小，当 n 趋于无穷大时，$\frac{1}{n}$ 将趋近于 0，从而 s_n 无限接近于一个定数 $\frac{1}{3}$，可以说各矩形面积的和 s_n 无限接近的是真正的面积 $\frac{1}{3}$．

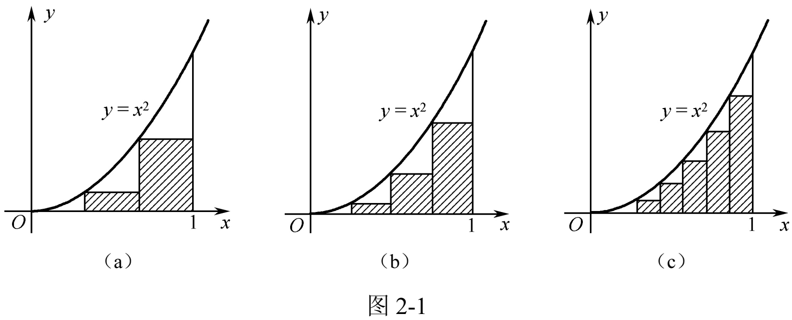

图 2-1

我国古代数学家刘徽也做过类似的工作．他先作圆的内接正 6 边形，计算其周长和直径比，再作内接正 12 边形计算其周长和直径比……作内接正 $2^n\times 6$ 边形计算其周长和直径比．刘徽所做次数有限，所得圆周率为 3.14，不过在当年这已是相当了不起的结果．

显然，这是一类用初等数学解决不了的问题．

按数学分析的思想和方法，要彻底解决这类问题，就必须脱离每个实际问题的具体内容，抽象出它们在数量上的关系和共有特性进行研究．经抽象后这类问题可描述成：

对于数列 $\{a_n\}$，随着 n 的增大，它与某一个定数 a 无限地靠近．这句话大致描述了数列 $\{a_n\}$ 的变化状态．为了更确切地弄清它与定数 a 无限接近的含义，先作其几何解释．设在数

轴上用点标出了定数 a 的位置，也用点标出了数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$（见图 2-2）.

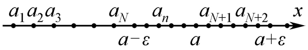

图 2-2

由于当 n 不断增大时 a_n 要无限接近 a，从直观上看，n 相当大后，点 a_n 都要落在 a 的附近，也就是说，与点 a 的距离很小．现任意给定一个正数 ε，作开区间 $I=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 并称 I 为 a 的一个 ε-邻域．现在观察数列 $\{a_n\}$，随着 n 增大，a_n 无限接近 a，这表明只有有限多项落在 ε-邻域之外，无限多项落在 ε-邻域之内．下面是数列极限的科学定义.

【定义 1】设有数列 $\{a_n\}$ 和定数 a，若对任意给定正数 ε，总可以找到正整数 $N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，必有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限，也称数列 $\{a_n\}$ 收敛，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或 \quad a_n \to a(n\to\infty).$$

后一写法通常读做 n 趋于无穷时，a_n 趋向于 a.

按上面的定义，阿基米德所计算的面积可记成

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}.$$

上面定义所用的说法称为“$\varepsilon-N$”说法.

由极限定义可得 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

用定义可计算（或证明）某些数列的极限.

例 1 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，要想 $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只须 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$，就有 $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

注：$[x]$ 表示不超过 x 的最大正整数.

同样可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=0$，因为 $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$.

可以看出，数列 $\left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 是在 0 点两边无限跳动的，也就是说，以 a 为极限的数列 $\{a_n\}$ 趋向于 a 的方式可以是多样的.

例 2 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1\ (a>1)$.

证明 令 $a^{\frac{1}{n}}=1+\lambda\ (\lambda>0)$，则

$$a=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>1+n\lambda \geqslant (a^{\frac{1}{n}}-1),$$

于是

$$0<a^{\frac{1}{n}}-1<\frac{a-1}{n}.$$

这样一来，对于任给 $\varepsilon>0$，要想 $\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|<\varepsilon$，令 $\frac{a-1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{a-1}{\varepsilon}$ 就行了．取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|<\frac{a-1}{n}<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1 \ \ (a>1).$$

例 3　求证 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0 \ \ (|q|<1)$.

证明　任给 $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$，要想 $\left|q^n-0\right|=|q|^n<\varepsilon$，只要 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$，或者 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|q^n-0\right|<\varepsilon$，于是

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0 \ \ (|q|<1).$$

例 4　求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$.

证明　由于

$$\left|\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)<\frac{1}{2n}<\frac{1}{n},$$

对于任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，从而有

$$\left|\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon.$$

即证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$.

2.2　数列极限的性质

上一节定义了数列的极限，也利用定义确定（证明）了几个数列的极限．在高等数学中，称有极限的数列为收敛数列，称无极限的数列为发散数列．上一节列举了一些收敛数列，实

际上发散数列也不少，例如$\{(-1)^n\}$和$\{n\}$都是发散的（无极限数列是指极限不存在或极限为无穷大的数列）.

若一个数列有极限，那么我们首要关心的是数列极限是否唯一.

【性质 1】收敛数列的极限是唯一的.

证明 设数列$\{a_n\}$有两个不同的极限a和a'，则$k=|a-a'|>0$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，由极限定义有，对于给定的$\varepsilon=\dfrac{k}{2}>0$，存在$N$，当$n>N$时$|a-a_n|<\dfrac{k}{2}$.

同样，由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a'$，对于给定的$\varepsilon=\dfrac{k}{2}>0$，存在$N'$，当$n>N'$时$|a_n-a'|<\dfrac{k}{2}$.

取$N''=\max\{N,N'\}$，当$n>N''$时，有

$$|a-a'|=|a-a_n+a_n-a'|\leqslant|a-a_n|+|a_n-a'|<\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=k.$$

即得$|a-a'|<k$，这与$|a-a'|=k$矛盾．这证实了数列$\{a_n\}$不可能有不同的极限.

收敛的数列还有些什么特性呢？

【性质 2】收敛的数列必定有界.

证明 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则对于$\varepsilon=1$，存在$N$，当$n>N$时，有$|a_n-a|<1$，从而

$$|a_n|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a|+1\}$，则对任意$n$，有$|a_n|\leqslant M$，即数列$\{a_n\}$有界.

既然收敛数列必定有界，则无界数列必定发散，但有界数列不一定收敛，例如数列$\{(-1)^n\}$是有界的，但它是发散的.

若数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是收敛的，那么数列$\{a_n+b_n\}$，$\{a_n-b_n\}$，$\{a_n\times b_n\}$，$\{a_n/b_n\}$是否也收敛？这些数列的极限如何计算？

【性质 3】设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=a\times b$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n)=a/b\ \ (b\neq0)$.

证明 （1）由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$知，对于任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时有

$$|a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |b-b_n|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|=|(a_n-a)\pm(b_n-b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|=\varepsilon.$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$.

（2）根据已知，对于任给$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时有

$$|a_n-a|<\varepsilon\text{，}\ |b_n-b|<\varepsilon\text{；}$$

且存在 $M>0$，对任意 n，有 $|a_n|\leqslant M$．于是当 $n>N$ 时有

$$|a_nb_n-ab|=|a_n(b_n-b)+(a_n-a)b|\leqslant|a_n||b_n-b|+|(a_n-a)||b|<(M+|b|)\varepsilon\ .$$

即有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$.

（3）只须证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}\right)=\dfrac{1}{b}\ \ (b\neq0)$ 即可．其证明留作习题请读者自证．

利用性质（3）很容易计算下列极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0}{b_ln^l+b_{l-1}n^{l-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_l}, & k=l\\ 0\ , & k<l\\ \infty\ , & k>l\end{cases}.\quad(a_kb_l\neq0)$$

从上式可以看出，求这类数列的极限时，只须考虑分子、分母的最高次项的阶数及对应的系数．

例 1　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n^2+4}{5n^3+6n+7}$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+2n^2+4}{5n^3+6n+7}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{5n^3}=\dfrac{2}{5}$.（$\because k=l=3$）

例 2　求证若 $a\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

证明　前面已经证明了 $a>1$ 时上式成立，显然 $a=1$ 时上式仍成立．这里只须证明 $0<a<1$ 时上式成立就行．

令 $b=\dfrac{1}{a}$，显然当 $0<a<1$ 时 $b>1$，由前面证明的商的极限等于极限的商立即得到

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}b^{\frac{1}{n}}}=1\ .$$

【性质 4】设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$， $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，

（1）若 $a>b$，则当 n 充分大后有 $a_n>b_n$；

（2）若存在 N，当 $n>N$ 时 $a_n\leqslant b_n$，则 $a\leqslant b$；

（3）若存在 N，当 $n>N$ 时 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，且 $a=b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

证明　（1）由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，s，取 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，存在 N，当 $n>N$ 时有

$$|a_n-a|<\varepsilon,|b_n-b|<\varepsilon\ .$$

于是

$$a_n > a-\varepsilon = a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}，\quad b_n < b+\varepsilon = b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$$

同时成立，故当 $n>N$ 后 $a_n>b_n$.

（2）用反证法. 设 $a>b$ ，根据（1），当 n 充分大后有 $a_n>b_n$ ，这与原假设存在 N ，当 $n>N$ 时 $a_n\leqslant b_n$ 相矛盾，所以 $a\leqslant b$.

（3）由条件，对于任给 $\varepsilon>0$ ，存在 N_1 ，当 $n>N_1$ ，有

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon，\quad a-\varepsilon<b_n<a+\varepsilon .$$

又存在 N ，当 $n>N$ 时 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ ，取 $N_2=\max\{N,N_1\}$ ，当 $n>N_2$ ，有

$$a-\varepsilon<a_n\leqslant c_n\leqslant b_n<a+\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}c_n=a .$$

对于性质 4，还要注意一些特殊情况：

对于（1），如果 $b_n\equiv b(n=1,2,\cdots)$ ，又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>b$ ，则当 n 充分大后有 $a_n>b$. 更特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$ ，则当 n 充分大后必有 $a_n>0$.

对于（2），若 $a_n>b_n$ ，则不一定有 $a>b$ ，如 $-\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n}$ ，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

利用性质 4 中的（3）可计算一些复杂极限.

例 3 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k}}$.

解 由于对任意 n ，有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}，$$

又

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}，\quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}，\quad 1<\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}<1+\frac{1}{n^2}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1，\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1，\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+k}}=1 .$$

例 4 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解 当 $n>1$ 时，设 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda\ (\lambda>0)$ ，则

$$n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2,$$

$$0<\sqrt[n]{n}-1=\lambda<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

2.3　数列极限存在的条件

前面介绍了极限的唯一性、有界性、运算性质、比较性质，也介绍了数列极限存在的必要条件是有界．本节介绍数列极限存在的条件．

2.3.1　单调数列、数 e

观察下面两个数列：

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}:\ 1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots;$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}:\ \frac{1}{2},\frac{2}{3}\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots.$$

第一个数列是逐渐减小的，而且有下界 0；第二个数列是逐渐增大的，有上界 1．

一般而言，若一个数列满足

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\cdots,$$

则称该数列为**单调增数列**．若数列满足

$$a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}\geqslant\cdots,$$

则称该数列为**单调减数列**.

单调增数列与单调减数列统称为单调数列．

【定理 1】单调有界的数列必定收敛．

由单调数列的特点，定理 1 又可叙述为：单调增有上界的数列必定收敛；单调减有下界的数列必定收敛．

定理的证明略．

由于数列$\{a_n\}$收敛与否与其前面的有限项无关，所以定理 1 也可描述为：若存在N，当$n>N$后 $\{a_n\}$单调有界，则数列$\{a_n\}$必定收敛．

例 1　证明$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛.

证明　先证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是递增的.

由算术平均值与几何平均值不等式，对任意n有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}\geqslant 1\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

于是数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$是递增的.

再证明数列是有上界的. 事实上，对任意n有

$$\frac{n}{n+1}=\frac{(n-1)\times 1+2\times\frac{1}{2}}{n+1}\geqslant\sqrt[n+1]{1^{n-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}=\sqrt[n+1]{\frac{1}{4}}>\sqrt[n]{\frac{1}{4}},$$

所以$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}<4$，即$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$有上界.

由定理 1 知$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$是收敛的，记

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}.$$

其中 e 到底等于多少？有何意义？将在本书的下册中介绍.

这个数字在数学分析中占有相当重要的地位，以 e 为底的对数称为自然对数，用$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$计算 e 值收敛甚慢，因而不宜用于计算 e 的近似值（取$n=2$，值为 2；取$n=3$，值为 2.25；取$n=100$，值为 2.718$\cdots$.

单调数列有界就收敛. 一般数列是否收敛，可用柯西收敛准则来判定.

2.3.2 柯西收敛准则

对于一般数列，柯西给出了收敛准则.

【定理 2（柯西收敛准则）】数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是：任给$\varepsilon>0$，存在$N(\varepsilon)$，当$n>N,m>N$时，有$\left|a_n-a_m\right|<\varepsilon$成立.

这个定理的严格证明较为困难，故这里不加证明. 为了使用方便，柯西收敛准则常改写如下.

数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是：任给$\varepsilon>0$，有$N(\varepsilon)$，当$n>N$时，对一切正整数p有$\left|a_{n+p}-a_n\right|<\varepsilon$成立.

例 2　求证数列 $\{a_n\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin i}{2^i}\right\}$ 收敛.

证明　对任意 n,p 及任给 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}\left|a_{n+p}-a_n\right|&=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}\quad,\end{aligned}$$

而 $\frac{1}{2^n}\to 0\ (n\to\infty)$，故对任给 $\varepsilon>0$，有 $N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 从而当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，有 $\left|a_{n+p}-a_n\right|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon$.

由柯西收敛准则知数列 $\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin i}{2^i}\right\}$ 收敛.

上面的数列不是单调的，柯西收敛准则也适于单调数列.

例 3　求证 $\{b_n\}=\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right\}$ 收敛.

证明　当 $k>1$ 时，

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\,.$$

对任意 n,p 有

$$\begin{aligned}\left|b_{n+p}-b_n\right|&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&\leqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

于是对于任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，对于一切正整数 p，有 $\left|b_{n+p}-b_n\right|<\varepsilon$ 成立.

即证得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

例 4　求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$.

证明 设 $x_n=\dfrac{n^k}{a^n}$，显然 $x_n>0$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界. 现在证明 n 充分大后 $\{x_n\}$ 单调下降. 由于

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\dfrac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\dfrac{n^k}{a^n}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\cdot\frac{1}{a}\to\frac{1}{a}<1,\ (n\to\infty)$$

所以当 n 充分大时数列 $\{x_n\}$ 单调下降，因此 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，由上面的相邻项相比关系有

$$x_{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\frac{1}{a}x_n,$$

两边取极限得 $b=\dfrac{1}{a}b$，即 $\left(1-\dfrac{1}{a}\right)b=0$，$1-\dfrac{1}{a}\neq 0$，故只有 $b=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

既然柯西准则是数列收敛的充分必要条件，那么自然也可用该准则来判断数列发散.

例 5 求证 $\{c_n\}=\left\{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right\}$ 发散.

证明 存在 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，对任意 N，存在 $n>N$，取 $p=n$，有

$$\left|c_{n+p}-c_n\right|=\left|c_{2n}-c_n\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

因此数列 $\{c_n\}$ 是发散的.

2.4 数列极限的种类及其计算方法

上一节给出了数列收敛和发散的准则，但是单靠准则是难以计算出极限的．实际上，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 中，e 的理论值就不是用现有算法算出的．就目前的知识而言，已可以算出相当多的数列的极限．下面先为数列极限分类，然后介绍所给各类极限的计算方法.

计算数列极限的步骤是：

（1）给出数列的通项；

（2）将极限归类，按该类极限算法计算极限.

这里须说明：计算数列通项的算法很多，难以找到通用算法，书中绝大多数数列的通项都是已知的.

书本也是教师，教师的真正任务是授学生以渔．渔的含义不仅仅是捕鱼工具和捕鱼技术，首先得给渔分类．须知万能的渔具是没有的，万能的捕鱼技术也是没有的，同样，万能的算法也是没有的．

2.4.1　无穷大量的种类及比较

数列是一种特殊函数，计算数列的极限时只关心 n 趋于无穷时这些项的变化规律，为此须细分“无穷”．

前面已经证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$，而当 n 趋于无穷时，$\{a^n\}$和$\{n^k\}$ 都趋于无穷，可见，同样是无穷大量，但仍然有区别．

【定义 1】对于数列 $\{a_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，则称 a_n 为 $n\to\infty$ 时的无穷大量，简称 a_n 为无穷大量．

【定义 2】对于数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，则当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$ 时，称 b_n 是 a_n 的高阶无穷大量，或称 a_n 是 b_n 的低阶无穷大量；当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=c(c\neq 0)$ 时，称 $n\to\infty$ 时 b_n 与 a_n 为同阶无穷大量；特别地，当 $c=1$ 时，称 $n\to\infty$ 时 b_n 与 a_n 为等价无穷大量．

按无穷大量的阶的高低可将其排序成

$$n^{\alpha n},(n!)^{\alpha},a^{\alpha n},n^{\alpha},\log_a n.\quad \alpha>0,a>1.$$

其中，排在前面的是排在后面的高阶无穷大．对于 a_1^n，a_2^n，当 $a_1>a_2>1$ 时，a_1^n 也是较 a_2^n 的高阶无穷大量．同样，当 $k_1>k_2$ 时，n^{k_1} 也是较 n^{k_2} 高阶的无穷大量．

无穷大量不是常量，是变量，是自变量趋于无穷大时而趋于无穷大的因变量．数列是特殊函数取值的集合，数列通项是特殊的因变量．

2.4.2　数列极限的分类及其计算方法

人们只关心收敛数列的极限，对于数列极限计算的重点和难点是各种不定式极限．

数列极限中有一定计算难度的极限分为 4 类：$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，$(\infty-\infty)$ 型，$\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 型，虚假 n 次运算型．

1．$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限计算

（1）$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限的一般格式

$$I=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{k}a_iP_i(N)\Big/\sum_{j=1}^{k'}b_jQ_j(N) \tag{4-1}$$

（2）$\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的标准格式

$$I=\lim_{N\to\infty}\frac{a_l P_l^*(N)}{b_m Q_m^{\ *}(N)} \tag{4-2}$$

式（4-1）中的 $P_i(N)$ 和 $Q_j(N)$ 都是无穷大量或常量，且至少有一个是无穷大量．$P_l^*(N)$ 和 $Q_m^{\ *}(N)$ 分别是分子和分母的主量，它们可以等于 $P_l\left(N\right)$，$Q_m(N)$，也可以是它们的等价无穷大量．$P_l^*(N)$，$Q_m^{\ *}(N)$ 一定属于 $N^{\alpha N}$，$(n!)^{\alpha}$，$a^{\alpha N}$，$N^{\alpha k}$，$\log a^N$ 之一或它们的乘积．

由式（4-1）转换到式（4-2）的算法是等价替换——找分子分母中的主量．

【定义 3】 设 $P(N)=\sum\limits_{i=1}^{m}P_i(N)$，$P_i(N)$ 中至少有一个是无穷大量，若 $P^*(N)$ 是其**主量**，则满足：

① $P^*(N)$ 是 $P_i(N)$ 中的最高阶无穷大量；

② $P^*(N)$ 只能属于 $N^{\alpha N}$，$(n!)^{\alpha}$，$a^{\alpha N}$，$N^{\alpha k}$，$\log a^N$ 之一或它们的乘积．

（3）$\frac{\infty}{\infty}$ 型极限计算的公式和计算过程

$$\begin{aligned}I&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{k}a_iP_i(N)\Big/\sum_{j=1}^{k'}b_jQ_j(N)\\&=\lim_{N\to\infty}a_lP_l^*(N)\big/b_mQ_m^{\ *}(N)\\&=\begin{cases}0 & P_l^*(N)\text{是}Q_m^*(N)\text{的低阶无穷大量}\\ \dfrac{a_l}{b_m} & P_l^*(N)\text{是}Q_m^*(N)\text{的等价无穷大量}\\ \infty & P_l^*(N)\text{是}Q_m^*(N)\text{的高阶无穷大量}\end{cases}\end{aligned} \tag{4-3}$$

其中 $P_l^*(N)$ 和 $Q_m^*(N)$ 分别是分子和分母的主量．

计算 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限时，可能涉及 $\sum\limits_{i=1}^{N}i^k$ 的计算．现给出其计算公式：

$$\sum_{i=1}^{N}i^k=\frac{1}{k+1}N^{k+1}+a_kN^k+\cdots+a_1N\text{，}\quad k=1,2,\cdots \tag{4-4}$$

式（4-4）中的 a_k 值可由待定系数法解得，算式可用归纳法证明．因低阶系数在计算数列极限时不起作用，故只给出最高阶系数．

例 1 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^5+n}+n^2+7}{n^{5/2}+100n^2}$.

解 上式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^5+n}}{n^{5/2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^5}}{n^{5/2}}=\sqrt{3}$.

例 2　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+7n^2+100n+7}{n^3+\sum\limits_{i=1}^{n}(2i-1)^2}$.

解　上式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^3+2^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(i-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{\left(1+4\times\dfrac{1}{3}\right)n^3}=\dfrac{3}{7}$.

这里利用了 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(i-\dfrac{1}{2}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}n^3$.

2. $(\infty-\infty)$ 型极限的计算

两个无穷大量之差可以是无穷大量，也可以是无穷小量，还可以是常量，故这类极限可分为三个子类.

（1）$(\infty-\infty)$ 型极限三个子类的一般格式

$$\begin{cases}I_1=\lim\limits_{N\to\infty}(\sqrt[k]{P_1(N)}-\sqrt[k]{P_2(N)})\big/P_3(N)\\ I_2=\lim\limits_{N\to\infty}(\sqrt[k]{P_1(N)}-\sqrt[k]{P_2(N)})\\ I_3=\lim\limits_{N\to\infty}(\sqrt[k]{P_1(N)}-\sqrt[k]{P_2(N)})P_3(N)\end{cases}\tag{4-5}$$

式（4-5）中 $P_1(N)$ 和 $P_2(N)$ 是等价无穷大量．本章只考虑 $P_1(N)$ 和 $P_2(N)$ 都由属于 $n^{\alpha n}$，$(n!)^{\alpha}$，$a^{\alpha n}$，N^k 等无穷大量的单项组成的代数和.

（2）$(\infty-\infty)$ 型极限的三个子类的标准格式

$$\begin{cases}I_1=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{(b_1-b_2)Q(N)}{k(P^*(N))^{k/k-1}P_3^*(N)}\\ I_2=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{(b_1-b_2)Q(N)}{k(P^*(N))^{k/k-1}}\\ I_3=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{(b_1-b_2)Q(N)}{k(P^*(N))^{k/k-1}}P_3^*(N)\end{cases}\tag{4-6}$$

（3）由一般格式到标准格式的计算过程

① 找出 $P_1(N)$ 和 $P_2(N)$ 的主量 $P^*(N)$；找 $P_1(N)$ 和 $P_2(N)$ 的最高同阶相异无穷大量 $b_1Q(N)$ 和 $b_2Q(N)$；找 $P_3(N)$ 的主量 $P_3^*(N)$.

② 第一次等价替换

用 $\sqrt[k]{P^*(N)+b_1Q(N)}$ 替换 $\sqrt[k]{P_1(N)}$；用 $\sqrt[k]{P^*(N)+b_2Q(N)}$ 替换 $\sqrt[k]{P_2(N)}$；用 $P_3^*(N)$ 替换 $P_3(N)$.

③ 脱根式

将分子分母同乘以

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sqrt[k]{(P^*(N)+b_1Q(N))^{k-1-i}(P^*(N)+b_2Q(N))^i} \tag{4-7}$$

④ 第二次等价替换

形如式（4-2）的那部分分母用$k(P^*(N))^{\frac{k-1}{k}}$代替．标准型（4-6）已属于$\frac{\infty}{\infty}$型．

（4）按式（4-2）计算$\frac{\infty}{\infty}$型极限

注：脱根式时可直接将分母乘以$k(P^*(N))^{\frac{k-1}{k}}$，这样就不必再做第二次等价替换．

例 3 计算$s=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-2n^2+n+1}-\sqrt{n^3-2n^2+2n}\right)\left(3\sqrt{n+100}\right)$.

解 $P_1(N)$和$P_2(N)$的主量都为n^3，最高同阶相异无穷大量为n，$b_1=1$，$b_2=2$，$P_3(n)$的等价无穷量为$3\sqrt{n}$（算例中n均为公式中N）.

上式$=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+2n})(3\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-2n)\cdot 3\sqrt{n}}{2n^{3/2}}=-\dfrac{3}{2}$.

例 4 计算$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^9-4n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^9+100n})(n^4+100n^3)$.

解 $P_1(N)$和$P_2(N)$的主量都为n^9，最高同阶相异无穷大量分别为$-4n^2$，$0\times n^2$，$P_3(n)$的主量为n^4.

上式$=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^9-4n^2}-\sqrt[3]{n^9})n^4=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4n^6}{3\sqrt[3]{(n^9)^2}}=-\dfrac{4}{3}$.

例 5 计算$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+100}-\sqrt{n^2+100})$.

解 $P_1\left(N\right)$和$P_2\left(N\right)$的主量都为n^2，最高同阶相异无穷大量为n和$0\times n$.

上式$=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{2\sqrt{n^2}}=1$.

例 6 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+5n^4+n^3+100n}-\sqrt{n^5+5n^4+3n^3+100}}{\sqrt{n}}$.

解 $P_1(N)$和$P_2(N)$的主量都为n^5，最高同阶相异无穷大量为n^3，$3n^3$，$P_3(N)$的主量为$\sqrt{n}$.

上式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+n^3}-\sqrt{n^5+3n^3}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-3n^3}{2\sqrt{n^5}\sqrt{n}}=-1$.

例 7 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^6+3n^4+10n^2+1000)^{1/2}}-\sqrt{n^3+n}\right)\sqrt{n}$.

解 表面上看来，$P_1(N)$和$P_2(N)$外面的根次一样，但实际上不同，须转换成同根次式，即

$$\sqrt{(n^6+3n^4+10n^2+1000)^{1/2}}=\sqrt[4]{n^6+3n^4+10n^2+1000}$$

$$\sqrt{n^3+n}=\sqrt[4]{n^6+2n^4+n^2}$$

于是 $P_1(N)$ 和 $P_2(N)$ 的主量都为 n^6，最高同阶相异无穷大量为 $3n^4$，$2n^4$.

$$\text{上式}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt[4]{n^6+3n^4}-\sqrt[4]{n^6+2n^4})\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\sqrt{n}}{4(n^6)^{3/4}}=\frac{1}{4}.$$

3. $\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 型极限的计算

在数列极限一章中，能计算 $\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 的极限有限，只能计算下述格式的极限，这里仍称之为一般格式.

（1）$\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 型极限的一般格式

$$I=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{P_1(N)}{P_2(N)}\right)^{P_3(N)} \tag{4-8}$$

式（4-8）中 $P_1\left(N\right)$ 和 $P_2\left(N\right)$ 是等价无穷大量.

（2）$\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 型极限的标准格式

$$I=\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{Q^*(N)}{P_2(N)}\right)^{P_3(N)} \tag{4-9}$$

式（4-8）到式（4-9）须经恒等变换得到（学了函数极限后，其一般格式才真正具有一般性）.

（3）$\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 型极限的计算公式及计算过程

① 恒等变换

$$\frac{P_1(N)}{P_2(N)}=1+\frac{P_1(N)-P_2(N)}{P_2(N)};$$

因 $P_1(N)$ 和 $P_2(N)$ 是等价无穷大量，$\dfrac{P_1(N)-P_2(N)}{P_2(N)}$ 一定是无穷小量.

② 标准化底

找 $P_1(N)-P_2(N)$ 的主量 $Q^*(N)$，找 $P_2\left(N\right)$ 的主量 $P_2^*(N)$，将底表述成

$$1+\frac{Q^*(N)}{P_2^*(N)}.$$

注：$Q^*(N)$ 可以是常量.

③ 标准化指数

找 $P_3(N)$ 的主量 $P_3^*(N)$.

极限计算过程为

$$I=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{P_1(N)}{P_2(N)}\right)^{P_3(N)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{P_1(N)-P_2(N)}{P_2(N)}\right)^{P_3^*(N)}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{Q^*(N)}{P_2^*(N)}\right)^{P_3^*(N)}$$

$$=\begin{cases}\infty & P_3^*(N)\text{是}P_2^*(N)/Q^*(N)\text{的高阶无穷大量}\\ \mathrm{e}^a & P_3^*(N)=\dfrac{P_2^*(N)}{Q^*(N)}\cdot a\\ 1 & P_3^*(N)\text{是}\dfrac{P_2^*(N)}{Q^*(N)}\text{的低阶无穷大量}\end{cases}.$$

例 8 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n!}{n!+1}\right)^{3n!+5}$.

解 恒等变换

$$\frac{n!}{n!+1}=1+\frac{n!-(n!+1)}{n!+1}=1+\frac{-1}{n!+1};$$

标准化底

$$1+\frac{-1}{n!+1}\to 1+\frac{-1}{n!};$$

标准化指数

$$P_3^*(N)=3n!;$$

极限计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n!+1}\right)^{3n!+5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n!-(n!+1)}{n!+1}\right)^{3n!+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n!+1}\right)^{3n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n!}\right)^{-3(-n!)}$$

$$=\mathrm{e}^{-3}.$$

4．虚假 n 次运算型极限

这类极限的关键是恒等变换．

虚假 n 次运算是指表面上看来要进行 n 次运算，实际上经过某种处理后，只需进行极有限的两三次运算．

（1）可转换成等比级数的 n 项和的极限

等比数列 n 项和的计算公式：

当 $|q|<1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=j_0}^{n} q^j = \frac{q^{j_0}}{1-q}.$$

对于 n 项和

$$S_n = \sum_{j=j_0}^{n} jq^j = j_0 q^{j_0} + (j_0+1)q^{j_0+1} + \cdots + nq^n \tag{4-10}$$

经下述恒等变换：

$$\begin{aligned} S_n^* &= S_n - qS_n \\ &= j_0 q^{j_0} + q^{j_0+1} + \cdots + q^n - nq^{n+1} \\ &= j_0 q^{j_0} - nq^{n+1} + \sum_{j=j_0+1}^{n} q^j \end{aligned}$$

上式最右端的累加和则是等比数列和．当 $|q|<1$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^* \big/ (1-q) = (j_0 q^{j_0} + q^{j_0+1} \big/ (1-q))/(1-q) \tag{4-11}$$

式（4-11）为这类极限的计算公式．

例 9　计算极限 $S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{1.5^2}+\dfrac{3}{1.5^3}+\cdots+\dfrac{n}{1.5^n}\right)$.

解　本例中 $0<q=\dfrac{1}{1.5}<1$．按式（4-11）有

$$\begin{aligned} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1.5^2}+\sum_{j=3}^{n}\frac{1}{1.5^j}-\frac{n}{1.5^{n+1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{1.5}\right) \\ &= \left(\frac{2}{1.5^2}+\frac{\frac{1}{1.5^3}}{1-\frac{1}{1.5}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{1.5}\right) \\ &= \left(\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\right)\Big/\frac{1}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

例 10　计算极限 $S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^2}-\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\cdots+(-1)^i\dfrac{i}{2^i}+\cdots\right)$.

解　$S_n - \dfrac{1}{2}S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^2}-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+(-1)^i\dfrac{1}{2^i}+\cdots\right)$,

$$-\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\to-\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^2}}=-\frac{1}{6},$$

$$\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{2m}}\right)\to\frac{1}{2^4}\bigg/\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{1}{12},$$

$$\begin{aligned}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^2}-\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2n+1}}\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}\right)\right)\bigg/\left(1-\frac{1}{2}\right)\\&=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\bigg/\frac{3}{2}\\&=\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

本例将问题的主体转换为计算两个公比为q^2的等比数列之和，计算结果和用式（4-11）计算的结果一样.

（2）可变n项和为两项和的极限

① 一般格式

$$\begin{aligned}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{i_0\alpha+\beta}\frac{1}{(i_0+1)\alpha+\beta}+\frac{1}{(i_0+1)\alpha+\beta}\frac{1}{(i_0+2)\alpha+\beta}+\cdots+\frac{1}{n\alpha+\beta}\frac{1}{(n+1)\alpha+\beta}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=i_0}^{n}\frac{1}{i\alpha+\beta}\frac{1}{(i+1)\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

② 标准格式

$$S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{i_0\alpha+\beta}-\frac{1}{(n+1)\alpha+\beta}\right) \tag{4-12}$$

③ 计算极限

$$S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=i_0}^{n}\frac{1}{i\alpha+\beta}\frac{1}{(i+1)\alpha+\beta}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{i_0\alpha+\beta}-\frac{1}{(n+1)\alpha+\beta}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{i_0\alpha+\beta} \tag{4-13}$$

由式（4-12）到式（4-13），其恒等变换过程为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=i_0}^{n}\frac{1}{i\alpha+\beta}\frac{1}{(i+1)\alpha+\beta}\\&=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{i_0\alpha+\beta}-\frac{1}{(i_0+1)\alpha+\beta}+\frac{1}{(i_0+1)\alpha+\beta}-\frac{1}{(i_0+2)\alpha+\beta}+\cdots+\frac{1}{n\alpha+\beta}-\frac{1}{(n+1)\alpha+\beta}\right)\\&=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{i_0\alpha+\beta}-\frac{1}{(n+1)\alpha+\beta}\right).\end{aligned}$$

例 11 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{1.2i+0.1}\times\frac{1}{1.2(i+1)+0.1}$.

解 上式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{2\times1.2+0.1}-\frac{1}{3\times0.2+0.1}+\frac{1}{3\times0.2+0.1}-\frac{1}{4\times0.2+0.1}+\cdots-\frac{1}{(n+1)\times0.2+0.1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1.5}\left(\frac{1}{2\times1.2+0.1}-\frac{1}{(n+1)\times0.2+0.1}\right)$$

$$=\frac{1}{1.5}\times\frac{1}{2\times0.2+0.1}=\frac{1}{0.75}=\frac{4}{3}.$$

（3）可变 n 项乘积为两项乘积的极限

① 一般格式

$$\prod_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(b+i_0)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(b+i_0+1)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(b+n)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=i_0}^{n}\left(1-\frac{1}{(b+i)^2}\right)\quad（4\text{-}14）$$

② 标准格式

$$\prod_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b+i_0-1}{b+i_0}\times\frac{b+n+1}{b+n}\right)\quad（4\text{-}15）$$

③ 计算极限

$$\prod_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(b+i_0)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b+i_0-1}{b+i_0}\times\frac{b+n+1}{b+n}\right)=\frac{b+i_0-1}{b+i_0}\quad（4\text{-}16）$$

例 12　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=3}^{n}\left(1-\dfrac{1}{(i+0.5)^2}\right)$.

解　上式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4+0.5}{3+0.5}\times\dfrac{2+0.5}{3+0.5}\times\dfrac{5+0.5}{4+0.5}\times\dfrac{3+0.5}{4+0.5}\times\cdots\times\dfrac{n+1+0.5}{n+0.5}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+0.5}{3+0.5}\times\frac{n+1+0.5}{n+0.5}\right)$$

$$=\frac{2+0.5}{3+0.5}=\frac{5}{7}.$$

（4）通项为 $\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m\cdots m\sqrt[k]{m}}}$（$k\neq0$，$k\neq1$，$m\neq0$）的极限计算，根号层次为 n

实际上，令 $a_n=\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m\cdots m\sqrt[k]{m}}}$（$n$ 重根号），则

$$a_{n+1}=\sqrt[k]{ma_n}.$$

当 $m>1$ 时，$\left\{\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m\cdots m\sqrt[k]{m}}}\right\}$ 为单调增数列，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$；当 $m<1$ 时，$\left\{\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m\cdots m\sqrt[k]{m}}}\right\}$ 为单调减数列，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$．显然当 $m>1$ 时 $a_n<m$；$m<1$ 时 $a_n>m$.

令 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m\cdots m\sqrt[k]{m}}}$ ，则有

$$a_{n+1}=\sqrt[k]{ma_n}\ .$$

两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m\cdots m\sqrt[k]{m}}}=\sqrt[k-1]{m}\ .$$

例 13 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\cdots\sqrt[4]{5}}}}$ （式中 n 为根号层次数）.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\sqrt[4]{5\cdots\sqrt[4]{5}}}}=\sqrt[3]{5}$.

（5）通项为 $\sqrt[k]{m+\sqrt[k]{m+\cdots+\sqrt[k]{m}}}$ 的极限计算

显然，数列 $\left\{\sqrt[k]{m+\sqrt[k]{m+\cdots+\sqrt[k]{m}}}\right\}$ 单调增有上限，设其极限为 a，则有

$$a^k=m+a\ .$$

当 $k>4$ 时，目前尚无通用算法求解，数学分析教材中尚未出现解三次和四次方程的相关算例，因此只考虑 $k=2$ 的情形，这时有

$$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4m}}{2}\ .$$

而当 $k=2$ 时，显然 $a>0$，所以这时解为 $a=\dfrac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$.

例 14 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ，式中 n 为根号层数.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=\dfrac{1+\sqrt{1+4\times 2}}{2}=2$.

（6）利用数列极限的算术平均数和几何平均数的极限等于数列所求极限

【性质 1】 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i}{n}=a$.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以数列有界，即存在 N，对任意 $\varepsilon>0$，当 $n<N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}a_i+\sum\limits_{i=N+1}^{n}a_i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=N+1}^{n}a_i}{n}=a\ .$$

【性质 2】设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} a_i} = a$．

证明略.

【推论 1】若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = a$，$b_n > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = a$．

证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = a$．

【推论 2】若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = d$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = d$．

例 15　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n}$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n}$=0.

实际上，这类极限的关键在于会计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，为此须牢记几个常见极限及极限的四则运算法则．几个常见极限为

① $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a\,(a>0)$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\,(a>0)$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k} = 0\,(k>0)$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k} = 1$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

若知道数列的通项，则很容易算出算术平均数和几何平均数，但若知道算术平均数或几何平均数，反过来求 n 个数不是一件易事．当然，若算术平均数或几何平均数是按定义给出的，则又当别论.

例 16　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$.

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{n} = 0$.

例 17　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 令 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}\Big/\dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}}{n}$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n}}=\mathrm{e}$.

思 考 题

1．叙述数列极限的定义并说明它的几何意义．

2．若对于几个或无穷多个 $\varepsilon>0$，有 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立，是否可以说 $\{a_n\}$ 以 a 为极限？

3．若对于任意 $\varepsilon>0$，有 N，使得当 $n>N$ 后有无穷多项满足不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$，那么能否 $a_n\to a(n\to\infty)$？

4．若 $a_n\to a(n\to\infty)$，今把 $\{a_n\}$ 的有限项换成新的数列，请问新数据是否收敛？是否仍以 a 为极限？

5．收敛数列是否一定有界？有界数列是否一定收敛？无界数列是否有可能收敛？

6．若 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散，$\{a_n\pm b_n\}$ 的收敛性如何？$\{a_nb_n\}$ 的收敛性如何？请举例说明．若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 皆发散，则情况又如何？

7．若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$？又是否能判别 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1$？

8．若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，是否能由此推出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$？

9．已知单调有界数列必收敛，那么收敛数列是否一定单调？举例说明．

10．若对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时有 $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$ 成立，是否能断定 $\{a_n\}$ 收敛？举例说明．

11．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)^n=1^n=1$，请问是否有错误？若有错误，原因何在？

12．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=0+0+\cdots+0=0$，请问是否有错误？若有错误，错误何在？

13．设 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=a\ (q>1)$，由于 $q^{n+1}=qq^n$，两边取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n+1}=a=a\cdot q$，由此有 $a=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (a>0)$，请问是否有错误？若有错误，错误何在？

习　　题

1．按照数列的极限定义，证明下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，并填下表.

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
N					

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n 0.1^n=0$，请问 n 从何值开始，使得数列 $\{(-1)^n 0.1^n\}$ 与其极限的差的绝对值不超 0.00001？

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n}{3n^2+4n+5}=\dfrac{1}{3}$.

2．从数列 $\{a_n\}$ 中任意挑选无限项，按照序号大小排成一个数列 $a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},\cdots,a_{n_k},\cdots$．试证明：若 $\{a_m\}$ 有一个子数列发散，则 $\{a_m\}$ 发散；若 $\{a_m\}$ 有一个子数列收敛，则并不说明 $\{a_m\}$ 收剑，请举例说明.

3．证明：若数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与偶数项都收敛于同一极限 a ，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

4．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$ ，但反之不一定，试举例说明．$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ 时，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

5．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ，$|b_n|<M\ (n=1,2,\cdots)$ ，M 是一个正常数，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n b_n=0$.

6．利用极限的性质及已知的数列极限计算如下数列的极限：

（1）$\left\{\dfrac{10^5 n}{n^2+1}\right\}$　　（2）$\left\{\dfrac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}\right\}$

（3）$\left\{\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n-2}\right\}$　　（4）$\left\{\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}\right\}\left(\begin{matrix}|a|<1\\|b|<1\end{matrix}\right)$

（5）$\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right\}$　　（6）$\left\{\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^n+3^{n+1}}\right\}$

（7）$\left\{\dfrac{3^n+2^{2n}+5n^5+10n}{4\times 4^n+n^{10}+n^8+1000}\right\}$　　（8）$\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(2i+2)^3+4n^3+8n^2+100}{0.5n^4+n^3+1000}\right\}$

（9）$\left\{\dfrac{3n^6+\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^5+10n^5+1}{2n^6+1000n^5}\right\}$　　（10）$\left\{\dfrac{2n^4+\sum\limits_{i=1}^{n}i^2+100n^3}{3n^4+10n^3}\right\}$

7．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{2n^6+7n^5+2n^4+100n}-\sqrt[3]{2n^6+7n^5})$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{3n^6+n^5+n^3+2n^2}-\sqrt[3]{3n^6+n^5-n^3+100n})n$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^6+\sqrt{n^{10}+n^3}+2n^5+n^2}-\sqrt{3n^6+3n^5}\right)n$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^8+2n^7+3n^6+100n}-\sqrt[3]{n^8+2n^7+n^6+100n})\Big/\sqrt[3]{n^2}$

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^{3/2}+n+10}-\sqrt[4]{n^8+2n^7+n^6+100n})\Big/\sqrt{n}$

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^{3n}n!+2n^{3n}+n^n n!-n^{10}}-\sqrt{n^{3n}n!+2n^{3n}+100n^{20}+n^{10}}}{n^{-0.5n}\sqrt{n!}}$

8．求下列数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+2n+3}\right)^{\frac{2}{n}}$　　（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n^2+2n+2}{n^3+n^2+2n+1}\right)^{\frac{3}{n^3}}$

9．求下列数列的极限：

（1）有数列 $a_0=a\neq 0$，$a_1=b\neq 0$，$a_2=\dfrac{a_0+a_1}{2}$，$a_3=\dfrac{a_1+a_2}{2}$，$\cdots$，$a_n=\dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$．

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{i}{2^i}$　　（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{i}{2.5^i}$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i i0.7^i$

10．求如下数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{3^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{(2i-1)^2}{n^3}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{16}{n^4}+\cdots+\dfrac{n^3}{n^4}\right)$

11．求下面各数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i(i+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\times 6}+\dfrac{1}{6\times 9}+\cdots+\dfrac{1}{3n\times 3(n+1)}\right)$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2\times 6}+\dfrac{1}{6\times 10}+\cdots+\dfrac{1}{\big(4(n-1)+2\big)\times(4n-2)}\right)$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3\times 0.5+1}\times\dfrac{1}{4\times 0.5+1}+\cdots+\dfrac{1}{(n\times 0.5+1)\times\big((n+1)\times 0.5+1\big)}\right)$

12．求如下数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-\dfrac{1}{2^i}\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=5}^{n}\left(1-\dfrac{1}{(i+0.2)^2}\right)$

13．求如下数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{3}}}$ （根式重数为 n ）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\cdots\sqrt[3]{m}}}}$ （根式重数为 n ）

14．给定 m 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$， $A=\max\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$.

15．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ （提示：利用 $\sqrt[n]{n}=1$， $n\to\infty$ ）.

16．直接观察下列数列的收敛性.

（1）$1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \cdots$

（2）$1, -2, 3, -4, 5, -6, \cdots$

（3）$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \cdots$

（4）$0, \dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{4}, \cdots$

（5）$\sin 1, \dfrac{1}{2}\sin 2, \dfrac{1}{3}\sin 3, \dfrac{1}{4}\sin 4, \cdots$

17．利用单调有界必有极限的原理证明下面的极限收敛.

（1）$a_n=\dfrac{1}{2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n+1}$

（2）$a_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

18．证明：若 x_n 单调增， y_n 单调减， $x_n<y_n$， 又 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

19．利用柯西准则判断下列极限的收敛性.

（1）证明 $a_n=\dfrac{\cos 1!}{1\times 2}+\dfrac{\cos 2!}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{\cos n!}{n\times(n+1)}$ 收敛.

（2）证明 $a_n=\dfrac{\sin 1}{1^2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$ 收敛.

（3）证明 $a_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}$ 发散.

20．已知函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|>1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|<1\end{cases}$，求证 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

第 3 章　函数极限与连续性

数列极限是函数极限的特类，函数极限在高等数学中占有更为重要的地位．没有函数极限就没有微积分．

3.1　函数极限的定义

大家知道数列是特殊函数，但特殊函数也是函数，因此函数极限的定义可仿数列极限定义．

【定义 1】对于连续函数 $f(x)$，$x\in[a,+\infty)$，A 是一个定数，对于任给 $\varepsilon>0$，若存在 $M\geqslant a$，当 $x>M$ 时有 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ （x\to+\infty）.$$

由定义 1 可看出截取 $x>M$ 的任意一小段，这一小段的函数值都拥有 $x>M$ 时 $f(x)$ 的所有值．其几何图形如图 3-1 所示．

数列中的各项按其序号大小从小而大排列而且序号只能取正整数值，但连续函数 $f(x)$ 的自变量不仅可取正数值，还可取负数值．

【定义 2】对于连续函数 $f(x)$，$x\in(-\infty,a]$，A 是一个定数，对于任给 $\varepsilon>0$，若存在 $M\leqslant a$，当 $x<M$ 时有 $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 $-\infty$ 时以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ （x\to-\infty）.$$

定义 2 所描述的函数极限的几何图形如图 3-2 所示．

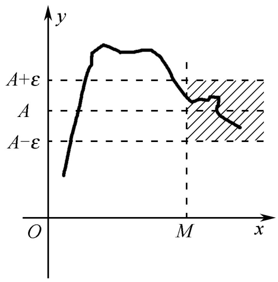

图 3-1

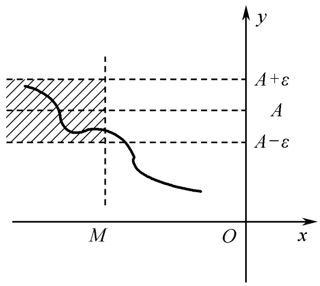

图 3-2

对于某类函数 x 趋于 $+\infty$ 和 x 趋于 $-\infty$ 有同一极限，则可用下面的定义．

【定义 3】对于连续函数 $f(x)$，$x\in(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$，$A$ 为定数，存在 $M_1\leqslant a$，$M_2\geqslant b$，

当 $x < M_1$ 或 $x > M_2$ 时有 $|f(x)-A| < \varepsilon$，则称 x 趋于 ∞ 时以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A\,(x\to\infty).$$

也可定义为：$\forall\varepsilon>0, \exists X>0, \forall x\in(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$，当 $|x|>X$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 x 趋于 ∞ 时以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A\ （x\to\infty）.$$

这类极限的几何图形如图 3-3 所示.

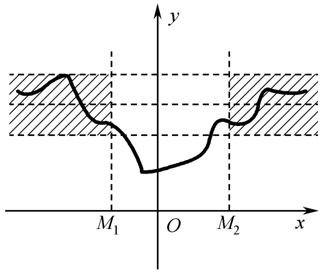

图 3-3

例 1　证明（1）$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

证明　任给 $\varepsilon>0$，由于

$$\left|\arctan x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| < \varepsilon$$

等价于 $-\varepsilon-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x < \varepsilon-\dfrac{\pi}{2}$，取 $\varepsilon<\dfrac{\pi}{2}$，则有

$$x < \tan\left(\varepsilon-\frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

对于任给正数 $\varepsilon\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$，只须取 $M=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$，则当 $x<-M$ 时有式（1）成立，这就证明了（1）小题，用类似的方法可证明（2）.

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

证明　任给 $\varepsilon>0$，取 $M=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，则

$$\left|\frac{1}{x^2}-0\right| = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{M} = \sqrt{\varepsilon},$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

对于连续函数，在其定义域内的任意两点之间，该函数可取无限多个值，因此还须做新的极限定义.

【定义 4】对于连续函数 $f(x)$，$x_0-\delta' < x < x_0+\delta'$，或记为 $U^0(x;\delta')$，若对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\,(<\delta')$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A\,(x\to x_0).$$

定义 4 所描述的极限的几何图形如图 3-4 所示.

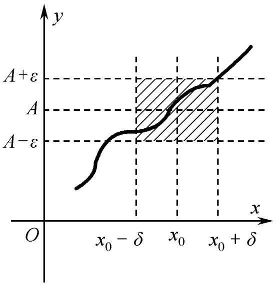

图 3-4

例 3　设 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，证明 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

证明　当 $x\neq 2$ 时，

$$|f(x)-4|=\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|.$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时 $|f(x)-4|<\varepsilon$，这就证明了 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.

例 4　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证明　作单位圆，显然当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，BC 小于 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度，

即 $\sin x<x$.

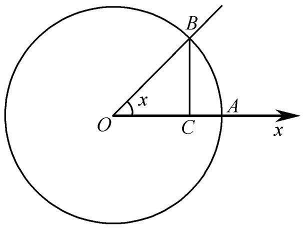

图 3-5

当 $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x\leqslant 1<\dfrac{\pi}{2}\leqslant x$，故

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant x-x_0.$$

对于任给 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$.

于是得证 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

实际上，对于连续函数 $f(x)$，$x,x_0\in[a,b]$，都有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 意味着 x 无论用什么方向去接近 x_0，都会使得 $f(x)$ 无限地与 A 接近．然而实际问题中也存在着这样的极限问题，它只要求考虑自变量从一侧去接近 x_0 的极限. 例如若要研究绝对零度附近的温度变化时，只能从大于 0 的一方去接近 0. 一般地，若 $f(x)$ 的定义域为 (a,b)，当我们考虑 x 去接近 a 或 b 时，只能从 a 的右方接近，从 b 的左方接近．总之，有必要考虑当自变量 x 限制在 x_0 的一侧无限趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化状态.

【定义 5】设有函数 $f(x)$ 在 $U_+^0(x_0;\delta')$ 或 $U_-^0(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数，若对任给 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta\,(<\delta')$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$（或 $x_0-\delta<x<x_0$）时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0^+（或 x_0^-）时的右（左）**极限**为 A，记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\ (\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A)$$

或

$$f(x)\to A\,(x\to x_0^+)\quad (f(x)\to A\,(x\to x_0^-)).$$

右极限与左极限统称为单侧极限，$f(x)$ 在点 x_0 的右极限与左极限还可分别记为

$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x) \text{ 与 } f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x).$$

注意：

（1）在实数域中或实数集中找不到 $+\infty$ 和 $-\infty$，趋于无穷不同于到达 $\pm\infty$，$\pm\infty$ 只是数轴中或坐标平面上假设的一个点，我们关心的是 $M-$邻域内无限多个点的函数关系和变化趋势，同样趋于 x_0 仍然是不达 x_0，我们更为关注的是 $\delta-$邻域内的无限多个点，而不将重点放在 x_0 一点上．实际上不少极限问题，$f(x)$ 在 x_0 可能无意义，这正是定义函数极限时只选取空心邻域的原因．

（2）教材中用了 $\varepsilon(\delta)$，$\varepsilon(N)$，$\varepsilon(M)$ 这样的符号．这里的 ε 和 δ，ε 和 N，ε 和 M 有关系，但不是函数关系，它们不是一对一的，而是多对多的．以 ε 和 δ 为例，通常 ε 取值较小，δ 取值也较小，由于 ε 是任给的，对于某一 δ，当 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 时，证明了 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，当 $|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 或 $|f(x)-f(x_0)|<k\varepsilon$ 时同样证明了 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；若确定了某个 δ，在 $U^0(x_0;\delta)$ 邻域内 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，在 $U^0\left(x_0;\dfrac{\delta}{2}\right)$ 邻域内 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 肯定也成立．

为了计算函数极限，单靠定义是不行的，还需要了解函数极限的性质．

3.2　函数极限的性质

函数极限的性质和数列极限的性质类似．同数列极限一样，我们首先考虑的是唯一性．

【性质 1】 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则此极限是唯一的．

证明　设 A 和 B 都是当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，不妨令 $A=B+\Delta$，且 $\Delta>0$，则对任给的 $\varepsilon=\dfrac{\Delta}{10}$，分别存在 δ_1 和 δ_2，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时有

$$|f(x)-B|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，两式同时成立，故有

$$\begin{aligned}|A-B|&=|(f(x)-B)-(f(x)-A)|\\&\leqslant|f(x)-B|+|f(x)-A|<2\varepsilon=\frac{\Delta}{5}.\end{aligned}$$

这与假设 $A=B+\Delta$ 矛盾，这就证明了极限的唯一性.

【性质 2】 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x)$ 在某一空心邻域 $U^0(x_0)$ 内有界.

证明 因 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，对于给定的 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，在空心邻域 $U^0(x_0;\delta)$ 内

$$\left|f(x)-A\right|<1,$$

即

$$\left|f(x)\right|<\left|A\right|+1.$$

也就是说，$f(x)$ 在空心邻域 $U^0(x_0;\delta)$ 上有界．因只证明 $f(x)$ 在 $U^0(x_0;\delta)$ 上有界，故这一性质也称为局部有界性.

【性质 3】 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\,(B\neq 0)$.

性质 3 的证明和数列极限类似性质的证明完全一样，为了节省篇幅这里不再证明．正因为数列极限的性质里也有这一性质，因此在函数极限里，当 $x\to\pm\infty$ 时同样有这样的性质（证明也略去）.

【性质 4】 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

（1）若 $A>B$，则在空心邻域 $U^0(x_0;\delta)$ 内有 $f(x)>g(x)$，特别地，若 $A>0$，则当 x 充分接近 x_0 时，有 $f(x)>0$；

（2）若 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $A\leqslant B$；

（3）若 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，且 $A=B$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

将 x_0 换成 $\pm\infty$ 或 ∞ 性质照样成立，因数列极限也有同样的性质，且已证明，故证明略.

利用上述函数的极限性质可计算一些简单的极限.

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)$.

解 上式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}x\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan x-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}1$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot 1-1=\frac{\pi}{4}-1.$$

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$.

解 上式 $=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x+1-3}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^3+1}$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x^2 - x + 1} = \frac{-1-2}{(-1)^2 - (-1) + 1} = -1 .$$

例 3　证明 $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1$，$m$ 为任意正整数.

证明　对于 $x \neq 0$，下面的不等式成立：

$$1 - |x| < (1+x)^{\frac{1}{m}} < 1 + |x| .$$

或

$$\left|(1+x)^{\frac{1}{m}} - 1\right| < |x| .$$

于是对于任给的 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，当 $0 < |x| < \delta$ 时，必然有

$$\left|(1+x)^{\frac{1}{m}} - 1\right| < \varepsilon .$$

这就是说，

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1 .$$

3.3　函数极限存在条件

函数极限存在与否主要取决于该函数在所考虑的邻域内的变化情况和变化规律.

海涅给出了归结原则，这一归结原则适合各种邻域，为了节省篇幅只给出在 $U^0(x_0;\delta')$ 邻域的证明.

【定理 1】设函数 $f(x)$ 在 $U^0(x_0;\delta')$ 上有定义，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是：对于任意一数列 $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$，只要 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，就有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

证明　先证必要性. 即证若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则对于任意不等于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，只要 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$，就有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

设 $\{x_n\}$ 是异于 x_0 的且满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 的任意数列，由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，在邻域 $U^0(x_0;\delta')$ 上必有正数 $\delta(<\delta')$，只要 $0 < |x - x_0| < \delta$，就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

因 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ $(x_n \neq x_0)$，对于上述 δ（$<\delta'$），可找到正数 N，当 $n > N$ 时便有

$$0 < |x_n - x_0| < \delta .$$

由此有，当 $n > N$ 时

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon，即 \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A .$$

再证充分性．也就是证明若对任意 $x_n \to x_0$ 都有 $f(x_n) \to A$，则必有 $\lim\limits_{n\to x_0} f(x_n) = A$．

现假设 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 不以 A 为极限，于是对某个 $\varepsilon > 0$，就没有对应的 $\delta > 0$ 存在，即不论取多么小的正数 δ，至少能找到一个 $x = x' \neq x_0$，虽然 $0 < |x' - x_0| < \delta$，但仍有 $|f(x') - A| \geqslant \varepsilon$．

取一趋向于零的正数列 $\{\delta_n\} = \delta, \dfrac{\delta}{2}, \cdots, \dfrac{\delta}{n}$，前面已经指出，对于任意的 $\delta = \delta_n$ 恒能找出 $x' = x_n'$，虽然 $0 < |x_n' - x_0| < \delta_n$，但仍有 $|f(x') - A| \geqslant \varepsilon$．这些数值便组成一个数列 $\{x_n'\}$，对于它们恒有

$$0 < |x_n' - x_0| < \delta_n．\ (n = 1, 2, \cdots)$$

因 $\delta_n \to 0$，故有 $x_n' \to x_0$，然而相应的数列 $f(x_n')$ 不收敛于 A，这就与 $x_n \to x_0$ 时有 $f(x_n) \to A$ 相矛盾，所以原命题成立．

海涅归结定理常简述成

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \text{对任何 } x_n \to x_0\ (n \to \infty) \text{ 都有 } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A．$$

也可简述成：若找到一个以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在或找到两个以 x_0 为极限的数列 $\{x_n'\}$ 和 $\{x_n''\}$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$ 的极限不同，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在．显然，第二个简述的可操作性较好．海涅归结原则也给出了计算数列极限的一条途径：将数列极限转换成相应的函数极限，计算函数的极限，该极限就是数列极限．

例 1 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在．

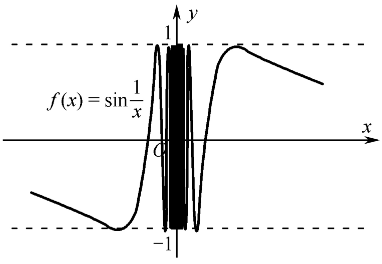

图 3-6

证明 取 $x_n' = \dfrac{1}{n\pi}$，$x_n'' = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，显然有

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = 0．$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'} = 0，\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n''} = 1．$$

故由归结原则知 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在．函数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 的示意图如图 3-6 所示．

【定理 2（柯西收敛准则）】 设函数 $f(x)$ 在 $U^0(x_0;\delta')$ 内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是，任给 $\varepsilon > 0$，存在正数 δ（$< \delta'$），使得对任何 x'，$x'' \in U^0(x_0;\delta')$ 都有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon．$$

证明 先证必要性．设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则对任给的 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\delta\,(< \delta')$，使得对任

何 $x\in U^0(x_0;\delta)$ 都有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是对任何 x'，$x''\in U^0(x_0;\delta')$ 都有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|(f(x')-A)+(A-f(x''))|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

再证充分性．设 $\{x_n\}\subset U^0(x_0;\delta')$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，按假设，对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta\,(<\delta')$，使得对任何 x'，$x''\in U^0(x_0;\delta')$ 都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$．由于 $x_n\to x_0\,(n\to\infty)$，对上述 $\delta>0$，存在 $N>0$，使得 $n,m>N$ 时有 x_n，$x_m\in U^0(x_0;\delta)$，从而有

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

于是按数列的柯西收敛准则，数列 $\{f(x_n)\}$ 极限存在，记为 A，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$．

设另一数列 $\{y_n\}\subset U^0(x_0;\delta')$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$，则如上所证，$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$ 存在，且记为 B，现证明 $B=A$．

考虑到 $\{z_n\}=\{x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots\}$，显然 $\{z_n\}\subset U^0(x_0;\delta')$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x_0$．当然 $\{f(z_n)\}$ 也收敛，作为 $\{f(z_n)\}$ 的两个子列，$\{f(x_n)\}$ 和 $\{f(y_n)\}$ 必有相同的极限，由海涅定理有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$．

用柯西准则判别函数极限不存在更方便．例如对于 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$，取 $\varepsilon=1$，对于任何 $\delta>0$，$n=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]$，令 $x'=\dfrac{1}{n\pi}$，$x''=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\,(n=1,2,\cdots)$，显然有 x'，$x''\in U^0(x_0;\delta)$，而

$$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|=1=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在．

3.4　两个重要极限

这一章的重点是计算极限，极限计算方法常常和这一章所介绍的两个极限有关，因此我们称这两个极限为两个重要极限．

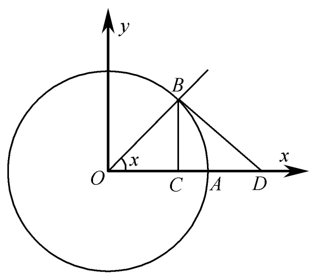

图 3-7

1．证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明　作单位圆（见图 3-7）．

（1）当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时

$$BC<\overset{\frown}{AB}<BD.$$

即

$$\sin x < x < \tan x\ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

由于$\sin x > 0$，因此有

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}，\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x .$$

（2）当$-\frac{\pi}{2} < x < 0$时

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin(-x)}{-x} .$$

也就是说，当$-\frac{\pi}{2} < x < 0$时和$0 < x < \frac{\pi}{2}$时一样，因此对于任给的$\varepsilon > 0$，我们取$\delta = \min\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$，则有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon .$$

这样就证明了$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

2．证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

证明 本题要求证$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

（1）先证$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

设$x > 1$，且$n < x < n+1$，于是有

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{n} .$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

而

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\mathrm{e}}{1} = \mathrm{e} .$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

又因为 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}\leqslant\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

（2）再证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

当 $x\to-\infty$ 时，令 $y=-x$，则 $y\to+\infty$，不妨令 $y>1$，此时

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right).$$

因此

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

综合有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

若令 $\alpha=\dfrac{1}{x}$，则上面的极限又可写成

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}.$$

3.5　无穷小量、无穷大量及渐近线计算

前面已经详细讨论了（离散的和连续的）变量的极限，即数列极限和函数极限，现在我们进一步来研究一类最简单的，但在数学理论中和实际应用上都起很大作用的变量，可以大大简化极限计算的变量，即所谓无穷小量和无穷大量．第 2 章已介绍了无穷大量，这一节主要介绍无穷小量．

3.5.1　无穷小量及其比较

【定义 1】设 $f(x)$ 在某 $U^0(x_0)$ 内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,$$

则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，也就是说极限为 0 的量称为**无穷小量**.

定义中的 x_0 可以是常量，也可以是 $\pm\infty$ 或 ∞ .

同是无穷小量，虽然都趋于 0，但如同第 2 章的无穷大量一样，它们有量级之分.

设 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小量，则当

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量，记为 $f(x)=o(g(x))$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 时，称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷小量，记为 $g(x)=o(f(x))$.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$（$C$ 是常数）时，称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是同阶无穷小量，记为 $f(x)=O(g(x))$.

（4）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 时，称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是等价无穷小量，记为 $f(x)\sim g(x)$（$x\to x_0$）.

（5）特别地，若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界，则记为 $f(x)=O(1)$，$x\in(a,b)$.

为了便于表述无穷小量之间的关系，常常可通过坐标变换将 $x\to x_0$（含 $\pm\infty$ 和 ∞）转换成 $x\to 0$，这样无穷小量之间的关系则为

$$x^k\,(k>1)=o(x,\sin x,\tan x,\sinh x,\tanh x,\arctan x,\arcsin x,\ln(1+x))$$
$$=o(x^u)\,(0<u<1)=o(1/\ln x).$$

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin^2 x)^{\frac{1}{x\tan x}}$.

解 上式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{2}{2x^2}}$$
$$=e^2.$$

上式利用了 $\sin^2 x\sim x^2$，$\tan x\sim x$（$x\to 0$）. 本章后面会总结这类极限的通用计算过程.

3.5.2 无穷大量及其比较

第 2 章中多次涉及无穷大（∞），也提到无穷大量，这里先给出和函数相关的无穷大量的准确数学定义.

【定义 2】设函数 $f(x)$ 定义在 $U^0(x_0)$ 上，若对于任给的 $G>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in U^0(x_0;\delta)$（$U^0(x_0)$）时有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有**非正常极限** ∞，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty.$$

同样可定义

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$；$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$；（$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$ 也有同样的情形）

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty；\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty；$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty；\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty .$$

无穷大量间的比较和无穷小量之间的比较类似，第 2 章中已有介绍，这里只须将第 2 章中的 n 变成 x 且去掉同“!”（阶乘）有关的项即可.

无穷大量的倒数是无穷小量，无穷小量的倒数是无穷大量，无穷小量间的比属未定型，无穷大量间的比也是未定型，无穷大量之差也属未定型．要计算更为复杂的函数的极限，必须了解函数的性质.

3.5.3　渐近线计算

曲线的渐近线计算是极限的一个应用，解析几何中明确指出渐近线是直线，任何直线都可用 $y=kx+b$ 表示，下面我们用数学语言描绘渐近线.

【定义 3】若曲线 C 上一个动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与一定直线 l 的距离趋于 0，则称直线 l 为曲线 C 的**渐近线**.

由渐近线 $y=kx+b$ 的定义及极限知识，若函数 $y=f(x)$ 有渐近线，则

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b\end{cases}.$$

反之则上式不成立.

特别地，当 $k\to\infty$ 时，渐近线为一垂直于 x 轴的直线，此时若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty ,$$

则渐近线为 $x=x_0$.

从定义到以上算式，我们没有指明 $+\infty$，$-\infty$，也就是说上述算式可能涉及 $+\infty$，也可能涉及 $-\infty$，这要因问题而异.

例 2　求双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线.

解　由 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)} .$$

对于 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$，

由极限 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{a}\dfrac{\sqrt{(x^2-a^2)}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{a}\dfrac{x\left(1-\dfrac{a^2}{x^2}\right)^{1/2}}{x}=\dfrac{b}{a}$，

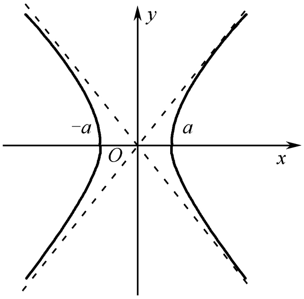

图 3-8

再由极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}-\dfrac{b}{a}x\right]=\dfrac{b}{a}\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{-a^2}{\sqrt{(x^2-a^2)}+x}\right]=0$，

所以双曲线的一支 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$ 的渐近线为 $y=\dfrac{b}{a}x$.

同样可得双曲线的另一支渐近线为 $y=-\dfrac{b}{a}x$，它们的图形如图 3-8 所示.

例 3　求曲线 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线.

解　$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3-2x^2-3x}{x^2+2x-3}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2\,.$$

所以曲线的一条渐近线为 $y=x-2$.

又由 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$ 得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3}{(x+3)(x-1)}=\infty,\quad \lim_{x\to-3}\frac{x^3}{(x+3)(x-1)}=\infty\,.$$

由此知曲线还有两条渐近线 $x=1$ 和 $x=-3$，图 3-9 给出了曲线 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 和它的三条渐近线，由于本书现在尚未介绍极值点、拐点，故所作曲线尚不准确.

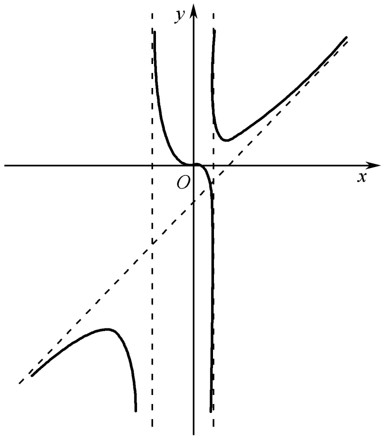

图 3-9

3.6　函数的连续性

高等数学中重点讨论的是连续函数，连续函数也须用数学语言定义.

3.6.1　函数在一点的连续性

【定义 1】设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\,,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 **连续**.

例如，函数 $f(x)=2x+1$ 在点 $x=2$ 连续，因为

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(2x+1)=5=f(2).$$

又如函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，因为

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0).$$

由于函数在一点的连续性是通过极限定义的，故也可用数学语言定义.

【定义 2】 若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称函数在 x_0 **连续**.

由上面可直接得到，若

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0,$$

则

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0.$$

这样就可得到，若函数 $f(x)$ 在 x_0 连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x_0).$$

例 1　证明函数 $f(x)=xD(x)$ 在 $x=0$ 连续，其中 $D(x)=\begin{cases} 0 & x\text{为有理数} \\ 1 & x\text{为无理数} \end{cases}$.

证明　由 $f(0)=0$ 及 $|D(x)|\leqslant 1$ 知，对任给 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$ 就有

$$|f(x)-f(0)|=|D(x)|\leqslant|x|<\varepsilon,$$

即按函数连续的定义知，$xD(x)$ 在 $x=0$ 连续.

【定义 3】 设函数 $f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ ($U_-(x_0)$) 内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0) \quad \text{或} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 **右（左）连续**.

根据上述定义不难得出：

【定理】 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是：$f(x)$ 在点 x_0 既是右连续，又是左连续.

例 2　讨论函数 $f(t)=\begin{cases} 0.5t+5 & -10\leqslant t<0 \\ t+85 & 0\leqslant t\leqslant 10 \end{cases}$ 在 $t=0$ 点的连续性.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(0.5t+5)=5\,.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(t+85)=85\,.$$

而 $f(0)=85$，所以 $f(t)$ 在点 $t=0$ 右连续，但不左连续，从而 $f(t)$ 在 $t=0$ 不连续.

3.6.2　间断点及其分类

【定义 4】设函数 $f(x)$ 在 $U^0(x_0)$ 内有意义，若 $f(x)$ 在点 x_0 无定义，或在 x_0 点有定义而不连续，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**间断点**.

按此定义，我们对函数间断点做以下分类.

1．可去间断点

若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\,,$$

而 $f(x)$ 在 x_0 点无定义，或者有定义但 $f(x_0)\neq A$，则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**可去间断点**.

例如 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 点无定义，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点. 又如 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 点无定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点. 不过，函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 的 $x=0$ 点就不是间断点，这正是称这类间断点为可去间断点的原因.

2．跳跃间断点

若函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左右极限都存在，但

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)\,,$$

则称点 x_0 为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

例如 $f(x)=[x]$ 在 $x=n$ 处，$\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$，但 $\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$，所以 $y=[x]$ 在 $x=n$ 处为跳跃间断点.

可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点. 第一类间断点的特点是函数在该点存在左、右极限.

3．第二类间断点

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 至少左、右极限有一个不存在，则该点为函数的**第二类间断点**，

例如对 $f(x)=\dfrac{1}{x}$， $x=0$ 就是它的第二类间断点；对 $f(x)=D(x)$，任意点都是它的第二类间断点.

3.6.3　区间上的连续函数

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的每一个点都连续，则称 $f(x)$ 是在 I 上的连续函数．对于闭区间或半开半闭区间或开区间的端点，函数在这些端点上的连续是指左连续或右连续.

例如函数 $f(x)=C$， $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i x^i$， $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i \sin\alpha_i x$ 都是 R 上的连续函数，而对函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在 $(-1,1)$ 的每一点处都连续，在 $x=1$ 为左连续，在 $x=-1$ 为右连续．所以 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有且仅有有限个第一类间断点，则称 $f(x)$ 是区间 I 上的分段函数，例如函数 $f(x)=[x]$ 为区间 $[-3,3]$ 上的分段连续函数.

后面我们将证明所有初等函数在其定义域内为连续函数，但也存在在其定义域内有无限多个点都不连续的函数．例如，前面所提及的 $D(x)$ 在其定义域内没有一个点是连续的，黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q}\\ 0 & x\in(0,1)\text{ 内的无理数}\end{cases}.$$

其中 p， q 为正整数， $\dfrac{p}{q}$ 为既约真分数．则该函数在 $x\in(0,1)$ 内在有理数点处处不连续，而在无理数点处处连续.

3.6.4　连续函数的简单性质

连续函数的有些性质利用现在的知识无法证明，而不少性质只须根据连续函数的定义以及中学数学知识即可证明．因此以下性质我们皆只给出结论但不证明.

【性质 1（局部有界性）】若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有界.

【性质 2（局部保号性）】若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且 $f(x_0)>0$ （或 <0 ），则存在正数 $r<f(x_0)$ （或 $r<-f(x_0)$ ），存在 $U(x_0)$，使得对一切 $x\in U(x_0)$ 有

$$f(x)>r\ (\ f(x)<-r\ ).$$

当 $f(x_0)>0$ 时，不妨取 $r=\dfrac{1}{2}f(x_0)$，显然 $r<f(x_0)$，同样当 $f(x_0)<0$ 时，取 $r=\dfrac{1}{2}f(x_0)$，此时 $f(x_0)<-r$.

【性质 3】设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在点 x_0 连续，则

（1） $kf(x)$, $k\in R$

（2） $f(x) \pm g(x)$

（3） $f(x)g(x)$

（4）当 $g(x) \neq 0$ 时， $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

都在点 x_0 连续.

3.6.5　闭区间上连续函数的基本性质

【定义 5】 设函数 $f(x)$ 是定义在实数集 D 上的函数，若存在 $x_0 \in D$，使得对一切 $x \in D$ 有

$$f(x_0) \geqslant f(x) \quad（或 f(x_0) \leqslant f(x)），$$

则称 $f(x)$ 在实数集 D 上有**最大（最小）值**，并称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 D 上的最大（最小）值.

例如， $f(x) = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上有最大值 1，最小值 0．但一般而言，函数 $f(x)$ 在其定义域内不一定有最大值或最小值（即使 $f(x)$ 在其定义域上有界），如 $f(x) = x$ 在 $(0,1)$ 上既无最大值也无最小值．又如 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \in (0,1) \\ 2 & x = 0 或 1 \end{cases}$，它在闭区间上也无最大值和最小值.

【性质 4】 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值与最小值.

【推论】 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在闭区间上有界.

【性质 5】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续， $f(a) \neq f(b)$，且 $f(a) < \mu < f(b)$ 或 $f(a) > \mu > f(b)$，则存在 $x_0 \in (a,b)$，使得

$$f(x_0) = \mu .$$

这一性质称为介值性性质.

【推论】 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $x_0 \in \left[a,b\right]$，使得

$$f(x_0) = 0 ,$$

即方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

由连续函数的介值性还可推导出，在闭区间上的连续函数一定能在该区间找到最大值和最小值.

下面两例是函数的介值性性质的应用.

例 3　证明：若 $r > 0$， n 为正整数，则存在唯一正数 x_0，使得 $x_0^n = r$.

证明　先证存在性．由于 $x \to +\infty$ 时， $x^n \to +\infty$，故必存在正数 a，使得 $a^n > r$，因 $f(x)$ 在 $\left[0,a\right]$ 上连续，并有 $0 = f(0) < r < f(a)$，由连续函数的介值性知至少有一点 $x_0 \in (0,a)$，使得 $f(x_0) = x_0^n = r$.

再证唯一性．设正数 x_1 使得 $x_1^n = r$，则有

$$x_0^n - x_1^n = (x_0 - x_1)\sum_{i=1}^{n-1} x_0^i x_1^{n-i} = 0 .$$

由于后者恒大于 0，故只有 $x_0 = x_1$.

【性质 6】 若函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的严格单调增（或减）函数，则其反函数 $f^{-1}(x)$ 在其定义域 $[f(a), f(b)]$ 或 $[f(b), f(a)]$ 上连续.

【性质 7】 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 $f(x_0)$ 连续，则复合函数 $g(f(x))$ 在 x_0 连续.

由复合函数的连续性可得

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) .$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(f(x)) = g(\lim_{x\to\pm\infty} f(x)) .$$

这一性质为函数极限计算带来了极大方便.

例 4　计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{x}}$　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{x+1})^{3x}$　　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}} = \sqrt{2}$.

（2）
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}\right]^3 = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{x}\right]^3$$
$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{x}\right]^3 = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-(-(x+1))+1}\right]^3$$
$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-(-(x+1))}\right]^3 \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^3$$
$$= e^{-3} .$$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

3.6.6　一致连续

函数在一个区间上连续是指在该区间点点连续，而一致连续是更强的连续.

【定义 6】 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，若对于任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于任何 x'，$x'' \in I$，只要 $|x' - x''| < \delta$，就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon ,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**一致连续**.

【定理】 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

3.7 函数极限分类及算法

在学习第 4 章之前，我们只能计算以下几类极限.

3.7.1 连续函数的极限

连续函数的极限按连续函数的定义计算

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

3.7.2 $\dfrac{\infty}{\infty}$型极限计算

这类极限可书写成

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i p_i(x)\Big/\sum_{j=1}^{m}b_j q_j(x).$$

式中 $p_i(x)$ 和 $q_j(x)$ 至少有一对都趋于 ∞ （$x\to\infty$），或者说至少有一对都是无穷大量，否则无意义．这一章里 $p_i(x)$ 和 $q_j(x)$ 可以是 x^k，也可以是 $\sqrt[k_1]{x^{\alpha_1}+\sqrt{\cdots+x^{\alpha_r}}}$，还可以是其他无穷大量．现假设 $ap^*(x)$ 和 $bq^*(x)$ 分别是分子与分母中的主量.

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i p_i(x)\Big/\sum_{j=1}^{m}b_j q_j(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ap^*(x)}{bq^*(x)}$$

$$=\begin{cases}\infty & p^*(x)\text{是}q^*(x)\text{的高阶无穷大量}\\ \dfrac{a}{b} & p^*(x)\text{是}q^*(x)\text{的等价无穷大量}\\ 0 & p^*(x)\text{是}q^*(x)\text{的低阶无穷大量}\end{cases}.$$

注意：对于这类极限，若最高阶的无穷大量是带根号的，或该函数的定义域不包含负数，x 只能趋于 $+\infty$.

这类极限的计算分两步进行，第一步是找分子和分母的主项（最高阶单项无穷大量），第二步是按所给公式计算极限.

无穷大的量按高阶到低阶的顺序为

$$x^{\alpha x},\quad a^{\alpha x},\quad x^{\alpha},\quad \ln x\ (\alpha>0,\ a>1).$$

主量只能是单项 $x^{\alpha x}$，$a^{\alpha x}$，x^{α}，$\ln x$ 之一或它们的乘积，我们称之为单项无穷大量.

例 1 计算 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^{11}+\sqrt{x^5+1}}+x^5+x^4+10x+5}{x^{11/2}+x^3+x+100}$.

解 上式$=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^{11}}}{x^{11/2}}=2$.

例题中把最高阶无穷大量放在了首位.

这类极限的另一种形式为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}a_i p_i(N)\Big/\sum_{j=1}^{n}b_j q_j(N).$$

上式中 $p_i(N)$ 和 $q_j(N)$ 一般都是 $N\to\infty$ 时的无穷大量，这类极限在第 2 章已经介绍，它们的计算可按第 2 章介绍的算法计算，也可将 N 用 x 代替，按本章的算法计算.

例 2　计算 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\cot^3(1/N)+\sqrt{N^5+N}+N^2}{N^3+100}$.

解　上式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\cos^3(1/x)}{\sin^3(1/x)}+\sqrt{x^5+x}+x^2}{x^3+100}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\cos^3(1/x)}{\sin^3(1/x)}}{x^3}=1.$$

注：$\cot\dfrac{1}{x}$ 和 x 在 $x\to\infty$ 时是等价无穷大量.

3.7.3　$\infty-\infty$ 型极限

这类极限在一般教材中很少详细介绍. $\infty-\infty$ 型极限的共性有两条.

（1）两个无穷大至少有一个带根式，书中主要只考虑两个带同次根式的无穷大量；

（2）两个无穷大量是等价无穷大量.

$\infty-\infty$ 型一般格式共分成三个子类：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[k]{f_1(x)}-\sqrt[k]{f_2(x)})f_3(x)$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[k]{f_1(x)}-\sqrt[k]{f_2(x)})$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[k]{f_1(x)}-\sqrt[k]{f_2(x)})\big/f_3(x)$.

由一般格式到标准格式的计算过程和所用算法如下.

① 等价替换一

找 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的主量 $g(x)$（因 $f_1(x)\sim f_2(x)$，所以它们的主量相等）；找 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 中最高阶相异无穷大量 $\alpha_1 q(x)$ 和 $\alpha_2 q(x)$；用 $g(x)+\alpha_1 q(x)$ 代替 $f_1(x)$，用 $g(x)+\alpha_2 q(x)$ 代替 $f_2(x)$，找 $f_3(x)$ 的主量 $f_3^*(x)$，用 $f_3^*(x)$ 代替 $f_3(x)$.

② 脱分子根号

将替换后的算式乘以

$$\frac{\sum_{i=0}^{k-1}(g(x)+\alpha_1 q(x))^{i/k}(g(x)+\alpha_2 q(x))^{(k-i-1)/k}}{\sum_{i=0}^{k-1}(g(x)+\alpha_1 q(x))^{i/k}(g(x)+\alpha_2 q(x))^{(k-i-1)/k}}.$$

③ 等价替换二

用 $kg(x)^{\frac{k-1}{k}}$ 替换分母中的 $\sum_{i=0}^{k-1}\left(g(x)+\alpha_1 q(x)\right)^{i/k}\left(g(x)+\alpha_2 q(x)\right)^{(k-i-1)/k}$.

$\infty-\infty$ 型极限的三个子类的标准格式：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)q(x)f_3^*(x)}{kg(x)^{\frac{k-1}{k}}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)q(x)}{kg(x)^{\frac{k-1}{k}}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)q(x)}{kg(x)^{\frac{k-1}{k}}}$.

标准格式已属 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，可用 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 极限计算公式计算极限.

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+x^3+100x-5}-\sqrt{x^4+x^3+50x+7})(3x+5)$.

解 本例中 $f_1(x)=x^4+x^3+100x-5$， $f_2(x)=x^4+x^3+50x+7$， $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的主量为 $g(x)=x^4$， $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 中的最高阶相异无穷大量为： $\alpha_1 q(x)=100x$， $\alpha_2 q(x)=50x$.

用 $g(x)+\alpha_1 q(x)=x^4+100x$ 代替 $f_1(x)$，用 $g(x)+\alpha_2 q(x)=x^4+50x$ 代替 $f_2(x)$.

$f_3(x)=3x+5$， $f_3(x)$ 的主量为 $f_3^*(x)=3x$，用 $f_3^*(x)=3x$ 代替 $f_3(x)$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+x^3+100x-5}-\sqrt{x^4+x^3+50x+7})(3x+5)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+100x}-\sqrt{x^4+50x})(3x)$$

将上式乘以 $\dfrac{\sqrt{x^4+100x}+\sqrt{x^4+50x}}{\sqrt{x^4+100x}+\sqrt{x^4+50x}}$ 有

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+100x}-\sqrt{x^4+50x})(3x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(100x-50x)(3x)}{\sqrt{x^4+100x}+\sqrt{x^4+50x}}$$

用 $2g(x)^{\frac{k-1}{k}}=2(x^4)^{\frac{1}{2}}=2x^2$ 代替分母得

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to\infty}\frac{(100x-50x)(3x)}{2x^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{150x^2}{2x^2}\\&=75.\end{aligned}$$

例 4　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^{4x}+x^{3x}+3x^{2x}+3^{4x}+100x}-\sqrt{2x^{4x}+x^{3x}-2x^{2x}+x^5})$.

解　$f_1(x)=2x^{4x}+x^{3x}+3x^{2x}+3^{4x}+100x,\quad f_2(x)=2x^{4x}+x^{3x}-2x^{2x}+x^5$.其主量为 $2x^{4x}$，最高阶相异无穷大量 $3x^{2x}$ 和 $-2x^{2x}$.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^{4x}+x^{3x}+3x^{2x}+3^{4x}+100x}-\sqrt{2x^{4x}+x^{3x}-2x^{2x}+x^5})\\&=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^{4x}+3x^{2x}}-\sqrt{2x^{4x}-2x^{2x}})\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(3+2)x^{2x}}{2\cdot\sqrt{2x^{4x}}}\\&=\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5}{4}\sqrt{2}\ .\end{aligned}$$

例 5　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^8+x^7-\sqrt{x^8+x^7}+5x}-\sqrt[3]{x^8+x^7+5x^5})\sqrt[3]{x}$.

解　$f_1(x)=x^8+x^7-\sqrt{x^8+x^7}+5x$ ，$f_2(x)=x^8+x^7+5x^5$ ，$f_3(x)=\sqrt[3]{x}$.

$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的主量为 x^8． $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的最高阶相异无穷大量是 $0\cdot x^5$ ，$5x^5$ ． $f_3(x)$ 的主量为 $\sqrt[3]{x}$.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^8+x^7-\sqrt{x^8+x^7}+5x}-\sqrt[3]{x^8+x^7+5x^5})\sqrt[3]{x}\\&=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^8}-\sqrt[3]{x^8+5x^5})\sqrt[3]{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^5\sqrt[3]{x}}{3\cdot(x^8)^{2/3}}\\&=-\frac{5}{3}\ .\end{aligned}$$

例 6　计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^6+x^4}-\sqrt{x^6-x^4})/x$.

解　$f_1(x)=x^6+x^4$ ，$f_2(x)=x^6-x^4$ ，$f_3(x)=\dfrac{1}{x}$.

$f_1(x)$和 $f_2(x)$的主量为 $g(x)=x^6$，最高阶相异无穷大量为 $\alpha_1q(x)=x^4$ ，$\alpha_2q(x)=-x^4$. $f_3^*(x)=\dfrac{1}{x}$ ，则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^6+x^4}-\sqrt{x^6-x^4})/x\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-(-1))x^4}{2\sqrt{x^6}\cdot x}=1\ .\end{aligned}$$

对于 $\infty-\infty$ 型数列极限，可先转换成相应的函数极限计算.

例 7 计算 $\lim\limits_{N\to\infty}(\sqrt[3]{2\cdot 3^{3N}+4\cdot 3^{2N}+2^{2N}}-\sqrt[3]{2\cdot 3^{3N}+100N^5+100N})$.

解 $\sqrt[3]{2\cdot 3^{3N}+4\cdot 3^{2N}+2^{2N}}-\sqrt[3]{2\cdot 3^{3N}+100N^5+100N}$ 对应的函数为

$$\sqrt[3]{2\cdot 3^{3x}+4\cdot 3^{2x}+2^{2x}}-\sqrt[3]{2\cdot 3^{3x}+100x^5+100x}$$

$f_1(x)=2\cdot 3^{3x}+4\cdot 3^{2x}+2^{2x}$，$f_2(x)=2\cdot 3^{3x}+100x^5+100x$.其主量为 $2\cdot 3^{3x}$，最高阶相异无穷大量为 $\alpha_1 q(x)=4\cdot 3^{2x}$，$\alpha_2 q(x)=0\cdot 3^{2x}$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}(\sqrt[3]{2\cdot 3^{3N}+4\cdot 3^{2N}+2^{2N}}-\sqrt[3]{2\cdot 3^{3N}+100N^5+100N})\\
&=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2\cdot 3^{3x}+4\cdot 3^{2x}+2^{2x}}-\sqrt[3]{2\cdot 3^{3x}+100x^5+100x})\\
&=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2\cdot 3^{3x}+4\cdot 3^{2x}}-\sqrt[3]{2\cdot 3^{3x}})\\
&=\frac{4\cdot 3^{2x}}{3\cdot(2\cdot 3^{3x})^{2/3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^{2/3}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}.
\end{aligned}$$

$\infty-\infty$ 型极限计算时所做的“有理化”分子运算，其目的并不是有理化分子，而是将 $\infty-\infty$ 型极限转换成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，且能找到分子中的主量．当 $\infty-\infty$ 型极限中有一项是两个以上的同阶无穷大量的代数和时，若不做等价替换，算式将相当复杂.

例 8 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x-2\sqrt{x^2+x})$.

解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x-2\sqrt{x^2+x})&=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}+x-2\sqrt{x^2+x})\\
&=\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+\sqrt{x^2+x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}\\
&=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

这类极限计算时，最好每一步都尽量利用等价替换，去掉和极限无关的项.

3.7.4 $\frac{0}{0}$ 型极限

这类极限所涉及的函数为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i p_i(x)\bigg/\sum_{j=1}^{n}b_j q_j(x).$$

具体计算步骤为：

（1）将 $x\to a$ 转换成 $x\to 0$；

（2）将分子分母中非幂函数类无穷小量换成等价幂函数无穷小量.

x， $\sin x$， $\tan x$， $\sinh x$， $\tanh x$， $\arctan x$， $\arcsin x$， $\operatorname{arcsinh} x$， $\operatorname{arctanh} x$， $\ln(1+x)$ 是等价无穷小量；

（3）取出分子分母中的主量，无穷小量和无穷大量主量类似，无穷小量主量是最低阶无穷小量；

（4）按下面的公式计算极限.

设 $p_1(x)$ 和 $q_1(x)$ 是分子和分母中的主量，则

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^{m}a_i p_i(x)\Big/\sum_{j=1}^{n}b_j q_j(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{a_1 p_1(x)}{b_1 q_1(x)}=\begin{cases}0 & p_1(x)=o(q_1(x))\\ \dfrac{a_1}{b_1} & p_1(x)\sim q_1(x)\\ \infty & q_1(x)=o(p_1(x))\end{cases}$$

例 9　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\sin x^{5/2}+\sqrt{x^6+x^5+x^4}}{\tan^3 x+x^{5/2}-3x^2}$.

解　上式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^6+x^5+x^4}}{-3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-3x^2}=-\dfrac{1}{3}$.

当 $x\to 0$ 时，所有高阶无穷小都被忽略不计. 对于 $\sqrt{x^6+x^5+x^4}$，当 $x\to 0$ 时，x^6，x^5 都是 x^4 的高阶无穷小，都被忽略不计，因而只有 $\sqrt{x^4}=x^2$ 起作用；同样 x^3，$\sin x^{5/2}$ 是 x^2 的高阶无穷小，因而也被忽略不计. 另外，本例利用了 $\sin x^{5/2}$ 是 $x^{5/2}$ 的等价无穷小都是 x^2 的高阶无穷小量.

3.7.5　与差有关的 $\frac{0}{0}$ 型极限计算

这类极限有 3 个子类.

1． $0-0$ 型极限

这类极限的一般格式是

$$s=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{f_1(x)}-\sqrt[k]{f_2(x)}}{f_3(x)},$$

式中 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是等价的 x^{μ} 型无穷小量. $f_3(x)$ 是任意类型无穷小量.

这类极限的计算过程和算法与 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[k]{f_1(x)}-\sqrt[k]{f_2(x)}}{f_3(x)}$ 类似.

① 等价替换

找 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的主量 $f^*(x)$（因 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是等价无穷小量，所以主量相等），找 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的最低同阶相异无穷小量 $ar(x)$ 及 $br(x)$，用 $f^*(x)+ar(x)$ 代替 $f_1(x)$，$f^*(x)+br(x)$ 代

替 $f_2(x)$．找 $f_3(x)$ 的主量 $f_3^*(x)$ 并将之转换成 x^μ 型，用 $f_3^*(x)$ 代替 $f_3(x)$．

$$s=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{f_1(x)}-\sqrt[k]{f_2(x)}}{f_3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{f^*(x)+ar(x)}-\sqrt[k]{f^*(x)+br(x)}}{f_3^*(x)}$$

② 有理化分子（脱根式）

将算式乘以

$$\frac{\sum_{i=0}^{k-1}[f^*(x)+ar(x)]^{i/k}[f^*(x)+br(x)]^{(k-1-i)/k}}{\sum_{i=0}^{k-1}[f^*(x)+ar(x)]^{i/k}[f^*(x)+br(x)]^{(k-1-i)/k}}$$

③ 等价替换

用 $k[f^*(x)]^{(k-1)/k}\,f_3^*(x)$ 替换分母．此时算式变成标准格式

$$s=\lim_{x\to 0}\frac{(a-b)r(x)}{k[f^*(x)]^{(k-1)/k}\,f_3^*(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(a-b)r(x)}{g^*(x)}$$

④ 极限计算

用 $\dfrac{0}{0}$ 型极限计算公式计算标准格式．

例 10 计算 $s=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+x^2+x^3}-\sqrt[3]{x-2x^2+x^3}}{\sin x^{4/3}}$．

解 $f_1(x)=x+x^2+x^3$，主量 $f^*(x)=x$；

$f_2(x)=x-2x^2+x^3$，主量 $f^*(x)=x$．

$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的最低阶相异无穷小量为 x^2 和 $-2x^2$．

$f_3(x)=\sin x^{4/3}$，主量为 $\sin x^{4/3}$，等价 $x^{4/3}$．

等价替换，用 $f^*(x)+ar(x)$ 代替 $f_1(x)$，用 $f^*(x)+br(x)$ 代替 $f_2(x)$，用 $x^{4/3}$ 替换 $\sin x^{4/3}$．

有理化分子与简化并替换分母

$$s=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+x^2+x^3}-\sqrt[3]{x-2x^2+x^3}}{\sin x^{4/3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+x^2}-\sqrt[3]{x-2x^2}}{x^{4/3}}$$

整个计算过程为

$$s=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+x^2+x^3}-\sqrt[3]{x-2x^2+x^3}}{\sin x^{4/3}}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-(-2)]x^2}{3x^{2/3}\cdot x^{4/3}}=1.$$

2．形如 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i x^{r_i}-A}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j x^{s_j}-B}$ 的极限计算

这类极限的最基本、最简单的类型为

$$s=\lim_{x\to a}(x^m-a^m)/(x^n-a^n)$$

其计算过程为：

① 因式分解

$$x^m-a^m=(x-a)(x^{m-1}+ax^{m-2}+\cdots+a^{m-1})=(x-a)\sum_{i=0}^{m-1}x^{m-1-i}a^i$$

$$x^n-a^n=(x-a)\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1-i}a^i$$

② 极限计算

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}(x^m-a^m)/(x^n-a^n)\\&=\lim_{x\to a}\left((x-a)\sum_{i=0}^{m-1}x^{m-1-i}a^i\right)\Bigg/\left((x-a)\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1-i}a^i\right)\\&=\lim_{x\to a}\sum_{i=0}^{m-1}x^{m-1-i}a^i\Bigg/\sum_{i=0}^{n-1}x^{n-1-i}a^i\\&=\frac{m}{n}a^{m-n}\end{aligned}$$

（1）一般格式

$$s=\lim_{x\to a}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i x^{r_i}-A}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j x^{s_j}-B}$$

式中，$A=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i a^{r_i}$，$B=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j a^{s_j}$，$r_i$，$s_j$ 为整数．

由一般格式到标准格式的计算过程和算法如下．

① 将 A 分解成 $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i a^{r_i}$，$B$ 分解成 $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j a^{s_j}$．

② 恒等变换

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a^{r_i}-A=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x^{r_i}-a^{r_i})$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j a^{s_j}-B=\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x^{s_j}-a^{s_j})$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i x^{r_i}-A}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j x^{s_j}-B}=\lim_{x\to a}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i(x^{r_i}-a^{r_i})}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(x^{s_j}-a^{s_j})}$$

③ 因式分解

$$\alpha_i(x^{r_i}-a^{r_i})=\alpha_i(x-a)\sum_{k=0}^{r_i-1}x^k a^{r_i-1-k}\text{，}\quad i=1,2,\cdots,m\,.$$

$$\beta_j(x^{s_j}-a^{s_j})=\beta_j(x-a)\sum_{k=0}^{s_j-1}x^k a^{s_j-1-k}\text{，}\quad j=1,2,\cdots,n\,.$$

（2）标准格式

$$s=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\sum\limits_{k=0}^{r_i-1}x^k a^{r_i-1-k}}{(x-a)\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\sum\limits_{k=0}^{s_j-1}x^k a^{s_j-1-k}}$$

（3）极限计算

$$s=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\sum\limits_{k=0}^{r_i-1}x^k a^{r_i-1-k}}{(x-a)\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\sum\limits_{k=0}^{s_j-1}x^k a^{s_j-1-k}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i r_i a^{r_i-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j s_j a^{s_j-1}}$$

例 11 计算 $s=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3x^3-4}{2x^2+4x^4-6}$.

解 本例 $a=1$，$a^i=a^j=1$.

① 恒等变换

$$x+3x^3-4=x-1+3(x^3-1)\text{，}$$

$$2x^2+4x^4-6=2(x^2-1)+4(x^4-1)\,.$$

② 因式分解

$$x-1+3(x^3-1)=(x-1)(1+(x^2+x+1))\text{，}$$

$$2(x^2-1)+4(x^4-1)=(x-1)(2(x+1)+4(x^3+x^2+x+1))\,.$$

③ 极限计算

$$
\begin{aligned}
s &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1+3(x^3-1)}{2(x^2-1)+4(x^4-1)} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+x^2+x+1)}{(x-1)(2(x+1)+4(x^2+x+1))} \\
&= \frac{4}{4+4\times 3} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

3. $\dfrac{0-0}{0}$，$\dfrac{0}{0-0}$，$\dfrac{0-0}{0-0}$ 型极限计算

式中，0 都是无穷小量，原则上 $0-0$ 可以是任意的两个等价无穷小量．但函数极限这一章只能是两个三角函数之差或者两个双曲函数之差．这里将 1 也看成三角函数或双曲函数．所以这类极限也称为等价三角函数、双曲函数差型 $\dfrac{0}{0}$ 型极限．

函数极限这一章有三个一般格式，但计算过程和所用算法类似．这里只给出一类一般格式．

（1）一般格式

$$
s = \lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)-f_2(x)}{f_3(x)}
$$

式中，$f_1(x)-f_2(x)$ 可以是 $\sin^{k_1}x^{k_2}-\tan^{k_1}x^{k_2}$，也可以是 $\sinh^{k_1}x^{k_2}-\tan^{k_1}x^{k_2}$（减式和被减式可交换）．特殊情况下可以是 $1-\cos^{k_1}x^{k_2}$ 或 $1-\cosh^{k_1}x^{k_2}$．$f_3(x)$ 可以是任意无穷小量，也可以是无穷小量代数和．对于 $x\to a$，式中 x 用 $x-a$ 替换就行了．对于三角函数 a 可以是 $k\pi$，此时不必做坐标变换．

（2）标准格式

$$
s = \lim_{x\to 0}\frac{f^*(x)}{g^*(x)}
$$

式中，$f^*(x)$ 和 $g^*(x)$ 分别是分子和分母的主量，都是幂函数 ax^u．

由一般格式到标准格式常用到的计算公式为：

① $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$

② $1-\cosh x = -2\sinh^2\dfrac{x}{2}$

③ $\tan^k x-\sin^k x = (\tan x-\sin x)\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\tan^i x\sin^{k-1-i}x$

④ $\tan x-\sin x=\sin x\left(\dfrac{1-\cos x}{\cos x}\right)=\dfrac{-2\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos x}$

⑤ $\tanh^k x-\sinh^k x=(\tanh x-\sinh x)\sum\limits_{i=0}^{k-1}\tanh^i x\sinh^{k-1-i} x$

⑥ $\tanh x-\sinh x=\sinh x\left(\dfrac{1-\cosh x}{\cosh x}\right)=\dfrac{-2\sinh x\sinh^2\dfrac{x}{2}}{\cosh x}$

由一般格式到标准格式的计算过程和算式为：

① 形式转换

将 $\pm(\tan^k x-\sin^k x)$ 转换成 $\pm\dfrac{-2\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos x}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\sin^i x\tan^{k-1-i} x$.

将 $\pm(\tanh^k x-\sinh^k x)$ 转换成 $\pm\dfrac{-2\sinh x\sinh^2\dfrac{x}{2}}{\cos x}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\sinh^i x\tanh^{k-1-i} x$.

② 等价替换

用 $\dfrac{1}{2}x^3$ 替换 $2\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}$，用 kx^{k-1} 替换 $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\sin^i x\tan^{k-1-i} x$，用 $\dfrac{1}{2}x^3$ 替换 $2\sinh x\sinh^2\dfrac{x}{2}$，用 kx^{k-1} 替换 $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\sinh^i x\tanh^{k-1-i} x$，用 $f_3(x)$ 的主量替换 $f_3(x)$.

此时 $f^*(x)=\dfrac{1}{2}x^3\cdot kx^{k-1}=\dfrac{k}{2}x^{k+2}$.

③ 极限计算

$$s=\lim_{x\to 0}\frac{f^*(x)}{f_3^*(x)}$$

上式系 $\dfrac{0}{0}$ 型，可按 $\dfrac{0}{0}$ 型极限计算公式计算极限.

例 12 计算 $s=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x^2-\sin^2 x^2}{x^8}$.

解 利用公式

$$\begin{aligned}\tan^2 x-\sin^2 x&=(\tan x-\sin x)(\tan x+\sin x)\\&=\sin x\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)(\tan x+\sin x)\\&=2\sin x\sin^2\frac{x}{2}(\tan x+\sin x)\Big/\cos x\end{aligned}$$

得

$$\tan^2 x^2 - \sin^2 x^2 = 2\sin x^2 \sin^2 \frac{x^2}{2}(\tan x^2 + \sin x^2)\Big/\cos x^2$$

等价替换用 x^2 替换 $\sin x^2$，用 $\left(\frac{x^2}{2}\right)^2$ 替换 $\sin^2 \frac{x^2}{2}$，用 x^2 替换 $\tan x^2$，用 1 替换 $\cos^2 x$，得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x^2 - \sin^2 x^2}{x^8} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^2 \sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)(\tan x^2 + \sin x^2)}{x^8}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x^2\left(\frac{x^2}{2}\right)(x^2 + x^2)}{x^8}\\ &= 1.\end{aligned}$$

3.7.6　$(1+0)^\infty$ 型极限计算

这类极限有三种一般格式.

1. 第一子类

（1）一般格式

$$s = \lim_{x\to a}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]^{f_3(x)}$$

式中，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是等价无穷小量，通常 $f_3(x)$ 是 $\frac{f_2(x)}{f_1(x)-f_2(x)}$ 的同阶无穷大量.

（2）标准格式

$$s = \lim_{x\to a}\left[1+g^*(x)\right]^{f_3^*(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+g^*(x)\right]^{b/g^*(x)}$$

由一般格式到标准格式的计算过程为：

① 因式分解（利用多项式除法作因式分解）

将 $f_1(x)/(x-a)$ 取商再除以 $(x-a)$ 直到不能整除为止，设 $\frac{f^*(x)}{f_2^*(x)}$.

将 $f_2(x)$ 作因式分解，设 $f_2(x)=(x-a)^k g_2(x)$. 因 $f_1(x)\sim f_2(x)$，所以 $f_2(x)=(x-a)^k g_2(x)$.

② 等价替换

$$\frac{(x-a)^k g_1(x)}{(x-a)^k g_2(x)} = 1 + \frac{(x-a)^k (g_1(x)-g_2(x))}{(x-a)^k g_2(x)} = 1 + \frac{g_1(x)-g_2(x)}{g_2(x)} = 1 + g^*(x)$$

$g^*(x)$ 是 $\dfrac{g_1(x)-g_2(x)}{g_2(x)}$ 的主量.

注：若 $f_1(x)$ 或 $f_2(x)$ 不由幂函数组成，则需要作等价替换，变成由幂函数组成的函数. 也可先作变换 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=1+\dfrac{f_1(x)-f_2(x)}{f_2(x)}$，再对 $\dfrac{f_1(x)-f_2(x)}{f_2(x)}$ 分子分母作因式分解.

③ 标准化指数

取 $f_3(x)$ 的主量 $f_3^*(x)$.

④ 极限计算

$$s=\lim_{x\to a}\left[1+g^*(x)\right]^{f_3^*(x)}=\begin{cases}\infty & f_3^*(x)\text{是}\dfrac{1}{g^*(x)}\text{的高阶无穷大量}\\ \mathrm{e}^b & f_3^*(x)=\dfrac{b}{g^*(x)}\\ 1 & f_3^*(x)\text{是}\dfrac{1}{g^*(x)}\text{的低阶无穷大量}\end{cases}.$$

例 13 计算 $s=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^3-8x^2+21x-18}{x^2-6x+9}\right)^{\frac{4}{x-3}+x}$.

解 ① 因式分解

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$
$$x^3-8x^2+21x-18=(x-3)^2(x-2)$$

② 标准化底

$$\begin{aligned}&\frac{x^3-8x^2+21x-18}{x^2-6x+9}\\&=\frac{(x-3)^2(x-2)}{(x-3)^2}\\&=1+\frac{(x-3)^2(x-2)-(x-3)^2}{(x-3)^2}\\&=1+(x-3).\end{aligned}$$

③ 标准化指数

$$f_3(x)=\frac{4}{x-3}+x\text{，主量 } f_3^*(x)=\frac{4}{x-3}.$$

④ 极限计算

$$s=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-8x^2+21x-18}{x^2-6x+9}\right)^{\frac{4}{x-3}+x}$$

$$= \lim_{x \to 3}\left(\frac{(x-3)^2(x-2)}{(x-3)^2}\right)^{\frac{4}{x-3}+x}$$

$$= \lim_{x \to 3}[1+(x-3)]^{\frac{4}{x-3}}$$

$$= e^4 .$$

2．第二子类

（1）一般格式

$$s = \lim_{x \to 0}\left(1+\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\right)^{\sum_{j=1}^{n} g_j(x)}$$

式中，$f_i(x)$ 都是无穷小量，$g_j(x)$ 都是无穷大量或常量.

（2）标准格式

$$\lim_{x \to 0}[(1+f^*(x))]^{g^*(x)}$$

$f^*(x)$ 是 $f_i(x)$ 的主量. $g^*(x)$ 是 $g_j(x)$ 的主量，通常 $g^*(x)$ 是 $\dfrac{1}{f^*(x)}$ 的同阶无穷大量.

由一般格式到标准格式的计算过程和算法为：

① 标准化底

确定 $f_i(x)$ 的主量 $f^*(x)$.

② 标准化指数

确定指数主量 $g^*(x)$.

③ 等价替换

用 $1+f^*(x)$ 代替底，用 $g^*(x)$ 代替指数，则

$$\lim_{x \to 0}\left(1+\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\right)^{\sum_{j=1}^{m} g_j(x)} = \lim_{x \to 0}(1+f^*(x))^{g^*(x)} .$$

说明：为了便于确定 $f^*(x)$ 和 $g^*(x)$，最好对于 $x \to a$ 的算例作坐标变换，并用等价幂函数替换，由于这些不是计算这类算法的必要措施，故不在计算过程中特别提示.

④ 极限计算

$$s = \lim_{x \to 0}\left(1+\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\right)^{\sum_{j=1}^{m} g_j(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0}(1+f^*(x))^{g^*(x)}$$

$$=\begin{cases}\infty & g^*(x)\text{是}\dfrac{1}{f^*(x)}\text{的高阶无穷大量}\\ e^b & g^*(x)=\dfrac{b}{f^*(x)}\\ 1 & g^*(x)\text{是}\dfrac{1}{f^*(x)}\text{的低阶无穷大量}\end{cases}.$$

例 14 计算 $s=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2+\tan^2 x+\sinh x^3)^{\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{2}{x}}$.

解 等价替换底中的无穷小量：用 x^2 替换 $\tan^2 x$，用 x^3 替换 $\sinh x^3$， $2x^2+x^2+x^3$ 的主量为 $3x^2$，标准底为 $1+3x^2$.

等价替换指数中的各个无穷大量：用 $\dfrac{4}{x^2}$ 替换 $\dfrac{4}{\sin^2 x}$，指数 $\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x}$ 的主量为 $\dfrac{4}{x^2}$.

标准格式：

$$\begin{aligned}s&=\lim_{x\to 0}(1+2x^2+\tan^2 x+\sinh x^3)^{\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{2}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}(1+2x^2+x^2+x^3)^{\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{4}{x^2}}.\end{aligned}$$

极限计算：

$$\begin{aligned}s&=\lim_{x\to 0}(1+2x^2+\tan^2 x+\sinh x^3)^{\frac{4}{\sin^2 x}+\frac{2}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{4}{x^2}}\\&=\lim_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{12}{3x^2}}\\&=e^{12}.\end{aligned}$$

3．第三子类

第三子类为混合格式.

一般格式

$$s=\lim_{x\to a}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}+\sum_{i=1}^{k}g_i(x)\right)^{\sum_j^l q_j(x)}$$

式中，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是等价无穷小量，$g_i(x)$ 是无穷小量，$q_j(x)$ 是无穷大量.

这一子类的极限计算过程是上述两子类的综合过程，只是增加选主量中的主量一步．这里只给出一具体算例．

例 15　计算 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-4x+4}+\sin(x-2)+\tan(x-2)^3\right)^{\frac{3}{x-2}+\frac{4}{\sqrt{x-2}}+5}$．

解　① 标准化底的第一部分

$$\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2}=1+(x-2).$$

② 底中第二部分的主量为 $\sin(x-2)$，等价于 $(x-2)$.

③ 标准化底为 $1+2(x\text{-}2)$.

④ 标准化指数

指数主量为 $\dfrac{3}{x-2}$.

⑤ 标准格式为

$$\lim_{x\to 2}(1+2(x-2))^{\frac{3}{x-2}}.$$

⑥ 极限计算

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-4x+4}+\sin(x-2)+\tan(x-2)^3\right)^{\frac{3}{x-2}+\frac{4}{\sqrt{x-2}}+5}\\&=\lim_{x\to 2}\big(1+2(x-2)\big)^{\frac{3}{x-2}}\\&=\lim_{x\to 2}\big(1+2(x-2)\big)^{\frac{6}{2(x-2)}}\\&=e^6.\end{aligned}$$

3.7.7　$\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 型极限计算

这类极限也有三个一般格式.

1．第一子类

（1）一般格式

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)^{f_3(x)}.$$

式中，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的是等价无穷大量，通常 $f_3(x)$ 是 $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)-f_2(x)}$ 的同阶无穷大量.

（2）标准格式

$$s=\lim_{x\to\infty}(1+g^*(x))^{\frac{b}{g^*(x)}}.$$

由一般格式到标准格式的计算过程和所用算法为：

① 标准化底

a）恒等变换

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=1+\frac{f_1(x)-f_2(x)}{f_2(x)}.$$

因 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是等价无穷大量，$f_1(x)-f_2(x)$ 必然是 $f_2(x)$ 的低阶无穷大量.

b）确定 $f_1(x)-f_2(x)$ 的主量 $f^*(x)$，确定 $f_2(x)$ 的主量 $f_2^*(x)$.

c）确定 $\dfrac{f^*(x)}{f_2^*(x)}$ 的主量 $g^*(x)$.

② 标准化指数

确定 $f_3(x)$ 的主量 $f_3^*(x)$.

③ 计算 b，$f_3^*(x)=\dfrac{b}{g^*(x)}$ （当 $f_3^*(x)$ 是 $\dfrac{1}{g^*(x)}$ 的同阶无穷大量时）

④ 极限计算

$$\begin{aligned}
s&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)^{f_3(x)}\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f_1(x)-f_2(x)}{f_2(x)}\right)^{f_3^*(x)}\\
&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{f^*(x)}{f_2^*(x)}\right)^{f_3^*(x)}\\
&=\lim_{x\to\infty}(1+g^*(x))^{f_3^*(x)}\\
&=\begin{cases}\infty & f_3^*(x)\text{是}\dfrac{1}{g^*(x)}\text{的高阶无穷大量}\\ e^b & f_3^*(x)=\dfrac{b}{g^*(x)}\\ 1 & f_3^*(x)\text{是}\dfrac{1}{g^*(x)}\text{的低阶无穷大量}\end{cases}.
\end{aligned}$$

例 16　计算 $s=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3^x+2^x+x^{50}}{3^x+2\times 2^x+x^{100}}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^x+\left(\frac{4}{3}\right)^x}$.

解　分子 $f_1(x)=3^x+2^x+x^{50}$，分母 $f_2(x)=3^x+2\times 2^x+x^{100}$.

① 标准化底

$$\begin{aligned}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}&=1+\frac{f_1(x)-f_2(x)}{f_2(x)}\\&=1+\frac{3^x+2^x+x^{50}-(3^x+2\times 2^x+x^{100})}{3^x+2\times 2^x+x^{100}}\\&=1+\frac{-2^x-x^{100}+x^{50}}{3^x+2\times 2^x+x^{100}}.\end{aligned}$$

分子的主量为 -2^x，分母的主量为 3^x，标准化底为 $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

② 标准化指数

$f_3(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$，指数主量 $f_3^*(x)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$.

③ 极限计算

$$\begin{aligned}s&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x+2^x+x^{50}}{3^x+2\times 2^x+x^{100}}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^x+\left(\frac{4}{3}\right)^x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3^x+2^x+x^{50}-(3^x+2\times 2^x+x^{100})}{3^x+2\times 2^x+x^{100}}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2^x-x^{100}-x^{50}}{3^x+2\times 2^x+x^{100}}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2^x}{3^x}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^{-\left(-\frac{3}{2}\right)^x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^{-\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^x}}\\&=\mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$

2．第二子类

（1）一般格式

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right)^{\sum\limits_{j=1}^{n}g_j(x)} .$$

式中，$f_i(x)$ 必须都是无穷小量，$g_j(x)$ 至少有一个是无穷大量.

（2）标准格式

$$\lim_{x\to\infty}(1+f^*(x))^{g^*(x)} .$$

$f^*(x)$ 是 $f_l(x)$ 的主量，$g^*(x)$ 是指数的主量.

（3）极限计算

$$\begin{aligned}
s &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n}g_j(x)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+f^*(x)\right)^{g^*(x)}\\
&= \begin{cases}\infty & g^*(x)\text{是}\dfrac{1}{f^*(x)}\text{的高阶无穷大量}\\ \mathrm{e}^a & g^*(x)=\dfrac{a}{f^*(x)}\\ 1 & g^*(x)\text{是}\dfrac{1}{f^*(x)}\text{的低阶无穷大量}\end{cases}.
\end{aligned}$$

例 17 计算 $s=\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{1}{N^{2i+1}}\right)^{\left(\sum\limits_{i=1}^{N}j+\sum\limits_{i=1}^{N}j^2\right)}$，$m\geqslant 1$.

解 ① 计算 $\sum\limits_{j=1}^{N}j$ 和 $\sum\limits_{j=1}^{N}j^2$.

$$\sum_{j=1}^{N}j=\frac{N^2}{2}+o(N^2)$$

$$\sum_{j=1}^{N}j^2=\frac{1}{3}N^3+o(N^3)$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{N^{2i+1}}\right)^{\left(\sum\limits_{i=1}^{N}j+\sum\limits_{i=1}^{N}j^2\right)}=\lim_{N\to\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{N^{2i+1}}\right)^{\left(\frac{N^2}{2}+o(N^2)+\frac{N^3}{3}+o(N^3)\right)}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{N^{2i+1}}\right)^{\left(\frac{N^2}{2}+\frac{N^3}{3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\cdots+\frac{1}{x^{2m+1}}\right)^{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)}$$

② 标准化底

底中无穷小量的主量 $g^*(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

③ 标准化指数

指数中无穷大量的主量为 $f_3^*(x)=\dfrac{x^3}{3}$.

④ 极限计算

$$\begin{aligned}s&=\lim_{N\to\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{N^{2i+1}}\right)^{\left(\sum_{i=1}^{N}j+\sum_{i=1}^{N}j^2\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x^{2i+1}}\right)^{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+g^*(x)\right)^{f_3^*(x)}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3}}\\&=\mathrm{e}^3.\end{aligned}$$

3．第三子类（略）

对于其他类型极限的计算，下一章再介绍.

思　考　题

1．用严格的数学评议叙述下列极限的定义，并作出几何说明.

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$　（2）$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=l$　（3）$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$　（5）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$　（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2．若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$，是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 否？反之，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 一定成立？请举例说明.

3．若 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 极限存在，能否说明 $f(x)$ 在整个定义域有界？请举例说明.

4．下列各种说法是否正确？

（1）无穷小量是最小的数.

（2）无穷小量就是 0，就是绝对值最小的数.

（3）$-\infty$ 就是无穷小量.

（4）无穷大量是很大的数.

5．试举例说明 $\dfrac{\infty}{\infty}$、$\infty-\infty$ 型未定义的各种变化状态.

6．无穷大量与有界变量的乘积是否是无穷大量？

7．无穷大量与无穷小量的乘积变化状态如何？举例说明.

8．等价无穷大量与等价无穷小量有些什么性质？

9．试用“$\varepsilon-\delta$”说法写出 $f(x)$ 在 x_0 点不连续的定义.

10．若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，是否 $f(x)$ 在 x_0 点连续？

11．直接考察下列函数的连续性.

（1）$f(x)=\dfrac{4x}{(x-1)(x+2)}$　　（2）$f(x)=\ln\sin x$

（3）$f(x)=(\cos x)^{\sin x}$　　（4）$f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$

12．设在 $x=x_0$ 点，$f(x)$ 连续，$g(x)$ 不连续，$f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 的连续性如何？若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在该点不连续，情况又将如何？

13．试举出一个点点不连续的函数平方以后点点都连续.

14．用“$\varepsilon-\delta$”说法写出 $f(x)$ 在 (a,b) 内不一致连续的定义.

习　　题

1．根据定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$，并填写下表：

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
δ					

2．证明 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

3．证明 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1\ (a>0)$.

4．证明：若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A>0$，则当 x 充分接近 a 时，$f(x)>0$.

5．设 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$，求 $f(0^+)$，$f(0^-)$.

6．设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

7．证明极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，$\lim\limits_{x\to x_0}\cos\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在.

8．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$．

9．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$．

10．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^m-(1+nx)^m}{x^2}$．

11．求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$．

12．证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r$（$r$ 为有理数）．

13．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^{2x}+5^x+x^{100}+1000}{2x^{2x}+10^x+x^{1\,000}}$．

14．求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^3+2x^4+x^5}-\sqrt[3]{x^3+2x^4+x^6}\,/\,2\sqrt{x^6+x^7}$．

15．求 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2x^{4x}+3x^{3x}+2x^{2x}+100^x-x^{100}}-\sqrt{2x^{4x}+3x^{3x}+x^x+100^x+x^{100}})$．

16．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\sqrt{x^{10}+x}+5x^4+3x^3+7x}-\sqrt[3]{x^5+5x^4-x^3+x-100}\right)\left(4x^{\frac{1}{3}}+100.5\right)$．

17．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^5+x^4+x}-\sqrt{\sqrt{4x^{10}+4x^9+4x^6-2x^5}}\right)\left(x^{\frac{5}{2}}+x^{2x}+10\right)$．

18．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2x^3+x^5}-\sqrt{x+2x^3}}{3x^{4.5}+x^5+x^6}$．

19．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x+\tan x+\ln(1+x)+4x^2}{\sqrt{x^2+x^3}}$．

20．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$．

21．求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}=\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

22．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

23．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$

24．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

25．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

26．求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

27．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$

28．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

29．求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

30．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$

31．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

32．求证 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=\mathrm{e}^k$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$．

计算下列极限.

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-x}\right)^{x}$

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x^2}{1-x}}$

36. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+4x^2+8x^3}{x+9x^2+27x^3}\right)^{\frac{1}{x+16x^2+64x^3}}$

37. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+4x^3+8x^5}{x+9x^2+27x^3}\right)$

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{1}{8x^3}\right)^{\frac{1+2x+4x^2+8x^3}{1+3x+9x^2}}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{\sin^m x}$

40. 按定义证明当 a 时，

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a^x=+\infty$

（3） $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$

（4） $\lim\limits_{x\to x_0^+}\log_a^x=-\infty$

41. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0\ (a>1)$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^k}=0$.

42. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{e}^x+\sin x)$

43. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{\sin^m x}$

44. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

45. 从条件 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=0$ 决定常数 a 和 b .

46. 求证 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$.

提示：先证明关系式 $\sin x=2^n\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}$.

47. 设 $x\to 0$，证明下列等式：

（1） $2x-x^2=O(|x|)$

（2） $x\sin\sqrt{x}=O(x^{3/2})$

（3） $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim x^{\frac{1}{8}}$

（4） $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n+1)}{2}x^2+O(x^2)$

（5） $\sin x=x+O(x)$

（6） $\tan x\sim x$

（7） $\sqrt[n]{1+x}=1+\dfrac{1}{n}x+O(x)$

（8） $\tan x-\sin x=O(x^2)$

48. 设 $x\to+\infty$，证明下列等式：

（1） $2x^2-3x+1=O(x^2)$

（2） $\dfrac{x+1}{x^2+1}\sim\dfrac{1}{x}$

（3） $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

（4） $x+x^2\sin x=O(x^2)$

（5） $\sqrt{x+\sqrt{x\sqrt{x}}}=O(x)$

49．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$．

50．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{x}$．

51．用“$\varepsilon-\delta$”方法证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续．

52．要做一个金属正方形薄片，若要其面积 $y=x^2$ 与预计的 $y_0=100$ 平方厘米的差不超过：（1）±1 平方厘米；（2）±0.1 平方厘米；（3）±0.01 平方厘米；（4）ε 平方厘米．问其边长 x 可在什么范围内变更？

研究下面两题中各例中函数的连续性，并画出它们的大致图形．

53．（1）$f(x)=|x|$；　（2）$f(x)=[x]$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$；　（4）$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$．

54．（1）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ A & x=2\end{cases}$　（2）$f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x<1\\ 2-x & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

（3）$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 2-x & x=0\end{cases}$

55．计算

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}\quad (x\geqslant 0)$　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2\mathrm{e}^{nx}}{1+\mathrm{e}^{nx}}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$

56．设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x & x<0\\ a+x & x\geqslant 0\end{cases}$，怎样选择 a 才能使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续？

57．证明函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处右连续，但不左连续．

58．当 $x=0$ 时，下列函数失去意义，试定义 $f(0)$ 值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

（1）$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；　（2）$f(x)=\dfrac{\tan 2x}{x}$

（3）$f(x)=\sin x\sin\dfrac{1}{x}$；　（4）$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

59．证明：若 $f(x)$ 连续，则 $|f(x)|$ 必定连续，但反之不真，请举例说明．

60．证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $[a,b]$ 上任意 n 个点，则在 $[a,b]$ 中一定能找到一个点 ξ，满足

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))\text{．}$$

61．证明下列方程在指定区间内有根.

（1）$x^5-3x=1$，$1\leqslant x\leqslant 2$；（2）$x2^x=1$，$0\leqslant x\leqslant 1$

62．试证 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

63．试证 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

64．证明 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在 $(0,1)$ 内连续且有界但不一致连续.

65．利用函数连续性证明下列重要极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x}{x}=\ln a$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$（$\mu$ 为任意实数）.

66．求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^x$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

第 4 章　导数和微分

法国数学家费马研究极限时引入了导数的概念，而建立导数应归功于英国科学家牛顿和法国数学家莱布尼兹.

4.1　导数定义及其几何意义

4.1.1　导数引入

现通过两个物理问题引入导数概念.

设物体的运动规律用 $s(t)$ 表示，t_0 时刻物体位置为 $s(t_0)$，从 t_0 到 t 物体的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

当 $t\to t_0$ 时物体的瞬时速度应为

$$v(t)=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} \tag{1-1}$$

有一个由某种物质组成的物体 AB（见图 4-1），设 A 至 x 处的质量用 $m(x)$ 表示，$\Delta x=NM$，则 Δx 段的平均线密度为

$$\bar{\mu}=\frac{m(x_M)-m(x_N)}{x_M-x_N}$$

而 x_N 点的线密度为

$$\mu=\lim_{x\to x_N}\frac{m(x_M)-m(x_N)}{x_M-x_N} \tag{1-2}$$

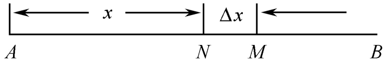

图 4-1

这两个问题最后都归结为计算同一算式

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1-3}$$

4.1.2　导数定义

现不再考虑具体问题的内容，抽象出式（1-1）和式（1-2）的共性就可对导数作出定义.

【**定义 1**】设函数 $f(x)$ 定义在某一邻域 $U(x_0)$，若极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导或可微，并记为 $f'(x_0)$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，并称 $f'(x_0)$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**或**微商**.

令 $x-x_0=\Delta x$，$f(x)-f(x_0)=\Delta y$，则式（1-3）可改写成

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \tag{1-4}$$

我们称 Δy 为 y 的增量，并称 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为差商.

在函数定义域的两个端点，我们可定义其右导数和左导数：

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \quad (0<\Delta x<\delta)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \quad (-\delta<\Delta x<0)$$

这里需说明，我们在定义导数时未对 $x \to x_0$ 或 $\Delta x \to 0$ 的方向有任何约定，因而函数在 $x=x_0$ 可导是指函数在 x_0 点处既有左导数，又有右导数，且左、右导数相等，否则皆称不可导．另外，到目前为止，我们仍然将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 视为一个整体.

按照上面的定义有

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \mu(x)=\frac{\mathrm{d}m(x)}{\mathrm{d}x}$$

当式（1-4）成立时，我们记

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x)=\alpha \tag{1-5}$$

显然

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0 .$$

可把式（1-5）改写为

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x \tag{1-6}$$

4.1.3 导数的几何意义

导数具有明显的几何意义.

设曲线 $f(x)$ 上一点 P 的坐标为 $(x_0, f(x_0))$，并设 $y=f(x_0)$ 在 x_0 处可导，我们在曲线上另取一点 P'，其坐标为 $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$，直线 PP' 是曲线上的一条割线（见图 4-2），它的斜率为

$$\tan(\varphi)=\frac{P'Q}{PQ}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

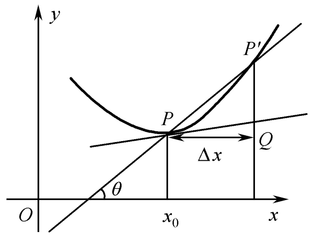

图 4-2

如果 P' 沿着曲线 $f(x)$ 移动并无限接近 P 时，$\Delta x\to 0$，割线 PP' 的斜率将趋于极限（若存在）

$$\lim_{\Delta x\to 0}\tan(\varphi)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

这就是说，当 P' 无限地移近 P 时，割线 PP' 必无限地接近某一极限位置（这个极限位置的直线斜率为 $f'(x_0)$）. 处于这个位置的直线称为曲线 $f(x)$ 在 P 点的切线（见图 4-2），其方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)\ .$$

例 1　计算 $y=x^3$ 在 $x=2$ 点处的切线方程和法线方程.

解　（1）曲线 $y=x^3$ 在 $x=2$ 点的切线斜率为

$$\begin{aligned}k&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^3-8}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\times 2^2\Delta x+3\times 2\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}=12.\end{aligned}$$

（2）曲线在 $x=2$ 处的切线方程为 $y-2^3=12(x-2)$，即 $y=12x-16$.

（3）曲线 $y=x^3$ 在 $x=2$ 处的法线斜率为 $k'=-\dfrac{1}{k}=-\dfrac{1}{12}$.

（4）法线方程为 $y-8=-\dfrac{1}{12}(x-2)$，即 $y=-\dfrac{1}{12}x+8\dfrac{1}{6}$.

4.2　初等函数的导数计算

只要函数在 $x=x_0$ 点的导数存在，根据导数定义可算出该函数的导数，不过计算过程会相当烦琐，因此这一节中还要介绍一些导数性质和计算法则.

4.2.1　直接利用定义计算一些基本初等函数的导数

1．幂函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x}=nx^{n-1}\qquad n\text{ 暂为整数}.$$

证明　按导数的定义有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^n (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

后面我们将证明幂函数导数计算公式中的 n 可以是不为 0 的任何实数.

2．正弦函数和余弦函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x\,,\quad \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x\,.$$

证明　按导数的定义有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \cos x\,.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$= -\sin x\,.$$

3．对数函数的导数

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}\,,\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

证明　按导数定义有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \log_a \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$= \log_a \lim_{\Delta x \to 0}\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} = \log_a \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x\ln a}\,.$$

为了更方便地计算一般初等函数的导数，须利用导数计算的基本法则.

4.2.2　导数计算的基本法则

先介绍导数的四则运算法则.

【定理】　若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 点可导，则

（1）$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$

（2）$(\alpha f(x))'=\alpha f'(x)$（$\alpha\neq 0$）

（3）$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

（4）$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$　（$g(x)\neq 0$）

证明　对于（1），按定义有

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x))-(f(x)+g(x))}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

同样可以证明 $\big(f(x)-g(x)\big)'=f'(x)-g'(x)$.

对于（2），按定义有

$$\begin{aligned}(\alpha f(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha f(x+\Delta x)-\alpha f(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x}\\ &= \alpha f'(x)\end{aligned}$$

由于 $\alpha f(x)$ 等于 α 个 $f(x)$ 相加，故我们把（2）也归入四则运算.

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

对于（4），按定义有

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{(f(x+\Delta x)g(x)-f(x))g(x)+(f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x))}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))g(x)}{\Delta x}-\frac{(f(x)(g(x+\Delta x)-g(x)))}{\Delta x}\right\}$$
$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

现介绍复合函数的求导规则.

【定理】设 $y=f(\mu)$， $\mu=\varphi(x)$ 都可导，则 $\left(f(\varphi(x))\right)'=f'(\mu)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$.

证明 设自变量 x 取得增量 Δx ，记 $\Delta\mu$ 为函数 $\varphi(x)$ 的增量，相应的函数 $f(\mu)$ 所产生的增量为 Δy ，即

$$\Delta\mu=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$$
$$\Delta y=f(\mu+\Delta\mu)-f(\mu)=f'(\mu)\Delta\mu+\alpha\Delta\mu \tag{2-1}$$

将式（2-1）两端除以 Δx 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(\mu)\frac{\Delta\mu}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta\mu}{\Delta x} \tag{2-2}$$

由于 $\mu=\varphi(x)$ 是可导的，因此也是连续的，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\mu=\lim_{\Delta x\to 0}(\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x))=0 .$$

前面已知证明， $\Delta x\to 0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\mu}{\Delta x}=\mu'=\varphi'(x) .$$
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(\mu)\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x) \tag{2-3}$$

式（2-3）也可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} \tag{2-4}$$

由此得出复合函数的导数等于已知函数对中间变量的导数乘以中间变量对自变量的导数，且这一过程还可以不断继续下去.

最后介绍反函数的导数计算规则.

【定理（反函数的微商）】设 $y=f(x)$ 是区间 I 上的一个单调连续函数，且 $f(x)$ 在点 x 的导数不等于 0，即 $f'(x)\neq 0$ ，则其反函数 $x=g(y)$ 在 $y(y=f(x))$ 点有微商，并且

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

证明　由于 $f(x)$ 是单调连续函数，故反函数也是单调连续函数，因此若令

$$\Delta x=g(y+\Delta y)-g(y),$$

由 $g(y)$ 的单调性知当 $\Delta x\neq 0$ 时，$\Delta y\neq 0$；由 $g(y)$ 的连续性知，当 Δy 趋于 0 时，Δx 也趋于 0，于是

$$g'(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y+\Delta y)-g(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

有了上述导数计算规则，便可计算一般初等函数的导数.

（1）$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，计算 $\tan' x$.

$$\tan' x=\frac{\sin' x\cos x-\sin x\cos' x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

（2）$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，计算 $\cot' x$.

$$\cot' x=\frac{\cos' x\sin x-\cos x\sin' x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$$

（3）$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，计算 $\sec' x$.

$$\sec' x=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{-\cos' x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\cdot\sec x.$$

（4）$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，计算 $\csc' x$.

$$\csc' x=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin' x}{\sin^2 x}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\cot x\cdot\csc x.$$

（5）计算 $(\mathrm{e}^x)'$，$(a^x)'$.

令 $y=\mathrm{e}^x$，则 $x=\ln y$，故

$$(\mathrm{e}^x)'=\frac{1}{(\ln y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=\mathrm{e}^x.$$

$$(a^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln a})'=\mathrm{e}^{x\ln a}(x\ln a)'=a^x\ln a.$$

（6）计算 $(\arcsin x)'$，$(\arccos x)'$，$(\arctan x)'$，$(\operatorname{arc}\cot x)'$.

令 $y=\arcsin x$，$x=\sin y$，则

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同样可得

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

令 $y = \arctan x$， $x = \tan y$，则

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\tan' y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

同样可得

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

有了这些法则，任何初等函数的导数就都很容易算出.

例 1　计算 $\sinh' x$ 和 $\cosh' x$.

解　$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$， $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$$\sinh' x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$\cosh' x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

例 2　计算 $(x^x)'$.

解　$x^x = e^{x\ln x}$，所以

$$\begin{aligned}(x^x)' = (e^{x\ln x})' &= e^{x\ln x}(x\ln x)' \\ &= e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).\end{aligned}$$

例 3　计算 $(x^{a^x})'$，a 是大于 0 的常数， $x > 0$.

解　$x^{a^x} = e^{a^x \ln x}$，所以

$$\begin{aligned}(x^{a^x})' &= e^{a^x \ln x}\left(a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x}\right) \\ &= a^x x^{a^x}\left(\ln a \ln x + \frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

例 4　$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$，计算 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

例 5　计算 $(x^{\mu})'$，$\mu\neq 0$.

解　$x^{\mu}=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$，故

$$(x^{\mu})'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\mu\frac{1}{x}=x^{\mu}\mu\frac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

例 6　计算 $(\sin^5(x+x^2))'$.

解　令 $y=\sin^5(x+x^2)=\mu^5$，$\mu=\sin v$，$v=x+x^2$，则

$$y'=5\mu^4\cos v(1+2x)$$
$$=5\sin^4(x+x^2)\cos(x+x^2)(1+2x).$$

4.2.3　函数的变化率

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数是曲线 $y=f(x)$ 过 x_0 点的切线的斜率，斜率的大小也表明了函数在该点的变化率，导数概念之所以重要，其原因之一就是因为它表示了函数的变化率.

例 7　已知气球半径以 5 cm/s 的速度增长，求半径为 5 cm 时气球体积和表面积对时间的变化率.

解　由已知有气球半径是时间的函数，即 $r=r(t)$，气球体积和表面积分别为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3(t),\quad S=4\pi r^2(t).$$

（1）体积变化率为 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=4\pi r^2\cdot 5=20\pi r^2$.

当 $r=5$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=20\pi r^2=20\pi\cdot 5^2=500\pi$（$\mathrm{cm^3/s}$）.

（2）表面积的变化率为 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=8\pi r\cdot 5=40\pi r$.

当 $r=5$ 时，表面积的变化率为 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=40\pi\cdot 5=200\pi$（$\mathrm{cm^2/s}$）.

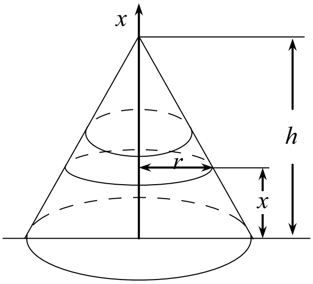

图 4-3

例 8 有一半径为 R 厘米，高为 h 厘米的圆锥容器（见图 4-3），从顶部以 a 立方厘米/秒的速度向其内部注水，求当水注到 $h/2$ 时，水面高度的变化率.

解 容器中水是高度为 x 的圆台，其体积为

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 (h-x)\\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R^2 \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 (h-x)\\ &= \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{\pi R^2}{3h^2}(h-x)^3.\end{aligned}$$

而 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{x=\frac{h}{2}} = \dfrac{\pi R^2}{h^2}(h-x)^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{x=\frac{h}{2}} = a$，故 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{4ah^2}{\pi R^2 h^2} = \dfrac{4a}{\pi R^2}$.

4.3 高阶导数、微分及高阶微分

按函数和导数的定义知，函数在定义域中的所有导数的组合仍是函数，导数的导数也应是函数，因此导数的导数的计算方法应和函数的导数的计算方法一样．这一节先介绍导数的导数，以及高阶导数的定义、计算方法和一些法则.

4.3.1 导函数

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的每一个点都可导（对区间端点，仅考虑相应的单侧导数），则称 $f(x)$ 为 I 上的可导函数，此时对每一个 $x \in I$，都有 $f(x)$ 的一个导数 $f'(x)$（或单侧导数）与之对应．这样就定义了一个在 I 上的新函数，称为 $f(x)$ 在 I 上的导函数，简称导数，记为 $f'(x)$．按前面的定义有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in I$$

如果函数 $y' = f'(x)$ 的导数存在，我们就把这个导数的导数称为 $y = f(x)$ 的二阶导数，记为 y'', $f''(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$．按前面的定义有

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

二阶导数并非导数单纯的推广，不少二阶导数具有深刻的物理意义，例如在力学中速度是路程的导数，加速度是速度的导数，不少工程物理问题都离不开加速度.

很明显，二阶导数仍是自变量 x 的函数，如果函数 $y'' = f''(x)$ 的导数存在，我们就称它

为函数 $y=f(x)$ 的三阶导数，记为 y'''，$f'''(x)$，$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3}$．

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数存在，我们就把该导数称为函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，记为 $y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}$，即

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

函数在其定义域内点点可导但不等于其导函数也点点可导，例如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

在其定义域内一阶导数存在，但对于 $x=0$，其二阶导数不存在．也就是说高阶导函数比其低阶导函数对函数的连续性要求更高．

4.3.2　高阶导数运算法则

由高阶导数的定义可直接想到其一部分运算法则应和低阶导数的运算法则一样：

$$(\alpha y)^{(n)}=\alpha y^{(n)}\qquad \alpha\text{ 是任意常数}$$

$$(f\pm g)^{(n)}=f^{(n)}\pm g^{(n)}$$

由于乘积函数的导数不等于其导函数的乘积，因此乘积函数的高阶导数必须由其低一阶导数表达式再利用乘积函数的导数运算法则给出．若 $f(x)=\mu(x)\nu(x)=\mu\nu$，则

$$(\mu\nu)'=\mu'\nu+\mu\nu'$$

$$(\mu\nu)''=(\mu'\nu+\mu\nu')'=\mu''\nu+2\mu'\nu'+\mu\nu''$$

$$(\mu\nu)'''=(\mu''\nu+2\mu'\nu'+\mu\nu'')'=\mu'''\nu+3\mu''\nu'+3\mu'\nu''+\mu\nu'''$$

$$\cdots$$

莱布尼兹给出了一个简单算式：

$$(\mu\nu)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\mu^{(n-i)}\nu^i$$

其中，$C_n^i=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!}$，它在西方称为牛顿二项式系数，实际上我国古代数学家杨辉早就用他的杨辉三角给出了算法：

$$\begin{cases}C_i^0=C_i^i=1\\ C_i^j=C_{i-1}^j+C_{i-1}^{j-1}\end{cases}\qquad i=0,1,\cdots,n,\quad j=0,1,\cdots n-1$$

杨辉算式中避开了乘法运算.

对于$\left(\dfrac{\mu}{\nu_0}\right)^{(n)}$的运算法则，只须令$\nu=\nu_0^{-1}$，并假设$\nu^{(1)}$，$\nu^{(2)}$，…，$\nu^{(n)}$都不为 0，直接套用莱布尼兹公式就行了.

例 1 设$y=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，计算$y^{(k)}$，$k\leqslant n$.

解 $y^{(1)}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}x^i$

$$y^{(k)}=(y^{(k-1)})'=\sum_{i=0}^{n-k}A_{i+k}^{k}a_{i+k}x^i .$$

由上式可以看出，当$k=n$时，$y^{(n)}=a_nn!$，$k=n+1$时，$y^{(n+1)}=0$.

例 2 设$y=\mathrm{e}^{ax}$，计算$y^{(n)}$.

解 显然$y'=a\mathrm{e}^{ax}$，$y'=a\mathrm{e}^{ax}$，…，所以

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=a^n\mathrm{e}^{ax} .$$

例 3 计算$y^{(n)}=(\ln(1+x))^{(n)}$.

解 $y'=(\ln(1+x))'=\dfrac{1}{1+x}$，

$$y''=(y')'=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$y'''=(y'')'=\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)'=\frac{1\times 2}{(1+x)^3},$$

…

$$y^{(i)}=(-1)^{i-1}\frac{(i-1)!}{(1+x)^i},$$

…

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} .$$

例 4 计算$(\sin x)^{(n)}$，$(\cos x)^{(n)}$.

解 $(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，

$(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x$，$(\cos x)''=(-\sin x)'=-\cos x$，

…

$$(\sin x)^{(n)}=\begin{cases}\sin x & n\text{除以4的余数等于0}\\ \cos x & n\text{除以4的余数等于1}\\ -\sin x & n\text{除以4的余数等于2}\\ -\cos x & n\text{除以4的余数等于3}\end{cases}$$

$$(\cos x)^{(n)}=\begin{cases}\cos x & n\text{除以4的余数等于0}\\ -\sin x & n\text{除以4的余数等于1}\\ -\cos x & n\text{除以4的余数等于2}\\ \sin x & n\text{除以4的余数等于3}\end{cases}$$

利用三角函数之间的关系，还可以将上式改写成

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\text{和}(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

例 5　计算 $y=x^2\cos ax$ 的 50 阶导数.

解　令 $\mu=\cos ax$，显然

$$\mu^{(n)}=a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right),$$

而

$$v'=2x,\quad v''=2,\quad v'''=v^{(4)}=\cdots=v^{(50)}=0,$$

所以

$$\begin{aligned}y^{(50)}&=a^{50}\cos(ax+25\pi)x^2+50a^{49}\cos\left(ax+\frac{49}{2}\pi\right)(2x)+\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2a^{48}\cos(ax+24\pi)\\&=-a^{50}x^2\cos ax-100a^{49}x\sin ax+2450a^{48}\cos ax.\end{aligned}$$

例 6　$y=\mathrm{e}^{ax}\sin bx$，计算 $y^{(n)}$.

解　令 $\mu=\mathrm{e}^{ax}$，$v=\sin bx$，则

$$\mu^{(k)}=a^k\mathrm{e}^{ax},\quad v^{(k)}=b^k\sin\left(bx+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\mu^{(n-k)}v^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k}\mathrm{e}^{ax}\sin\left(bx+\frac{k\pi}{2}\right).$$

例 7　证明 n 阶勒让德多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

满足关系式

$$(x^2-1)P_n''+2xP_n'-n(n+1)P_n=0.$$

证明　令 $y=(x^2-1)^n$，于是 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}y^{(n)}$，故

$P_n' = \frac{1}{2^n n!} y^{(n+1)}$， $P_n'' = \frac{1}{2^n n!} y^{(n+2)}$，对 $y=(x^2-1)^n$ 两边取对数得

$$\ln y = n\ln(x^2-1) .$$

由此有

$$\frac{y'}{\ln y} = \frac{2nx}{x^2-1} ,$$

即

$$(x^2-1)y' = 2nx\ln y ,$$

$$((x^2-1)y')^{(n+1)} = (x^2-1)y^{(n+2)} + C_{n+1}^1 2xy^{(n+1)} + C_{n+1}^2 2y^{(n)} ,$$

$$(2nxy)^{(n+1)} = 2nxy^{(n+1)} + C_{n+1}^1 2ny^{(n)} .$$

由此得到

$$(x^2-1)y^{(n+1)} + 2(n+1)xy^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2}y^n = 2nxy^{(n+1)} + 2n(n+1)y^{(n)} .$$

整理得

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^n = 0 ,$$

将等式两端同乘以 $\frac{1}{2^n n!}$ 得

$$(x^2-1)P_n'' + 2xP_n' - n(n+1)P_n = 0 .$$

4.3.3 高阶微分

前面已经介绍了导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 x 处的切线的斜率，体现了函数 $f(x)$ 在 x 处的变化率，利用导数理论应能计算函数的增量 Δy .

前面我们也介绍了当 $f(x)$ 在 x_0 处可导时的有限增量计算公式

$$\begin{cases} \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \\ \lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha = 0 \end{cases}$$

现进一步对上式分析．上式由两部分组成，第一部分 $f'(x)\Delta x$ 称为一阶增量的线性主部；第二部分是主部的高阶无穷小.

由此可立即得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}(f'(x)\Delta x) .$$

记 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$， $\mathrm{d}x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x$，并称 $\mathrm{d}y$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的微分，即

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x .$$

由上式可看出可微则可导，可导则可微.

这样 $\mathrm{d}y$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 就都有意义了，微分的几何意义如图 4-4 所示．有了一阶微分就可以定义二阶和高阶微分：

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x)=f''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x=f''(x)(\mathrm{d}x)^2=f''(x)\mathrm{d}x^2,$$

即

$$\mathrm{d}^2y=f''(x)\mathrm{d}x^2 .$$

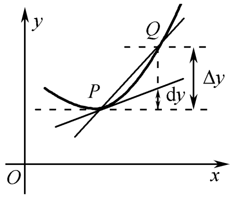

图 4-4

注意，$\mathrm{d}x^2\neq\mathrm{d}^2x$，$\mathrm{d}x^2\neq\mathrm{d}(x^2)=2x\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}(\mathrm{d}x)$．

类推得 n 阶微分是 $n-1$ 阶微分的微分．

$\mathrm{d}^ny=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y)$，$f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n=\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{d}x^n$，这样 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 和 d^ny 就都有数学意义了．

这里作两点说明：

（1）$\mathrm{d}^ny=\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{d}x^n$ 成立的前提是 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 存在；

（2）除了 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 以外，$\mathrm{d}^ny=\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{d}x^n$ 成立的条件是 x 必须是自变量，而不能是中间变量．

若 $y=f(x)$，$x=\varphi(t)$，按定义有

$$\mathrm{d}y=\big(f(\varphi(t))\big)'\mathrm{d}t=f'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x .$$

但是对于二阶微分，按定义

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)&=\big(f'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\big)'\mathrm{d}t\\&=f''(\phi(t))(\phi'(t))^2\mathrm{d}^2t+f'(\phi(t))\phi''(t)\mathrm{d}t^2\\&=f''(x)\mathrm{d}x^2+f'(x)\mathrm{d}^2x .\end{aligned}$$

这说明只有一阶微分才具有不变性．

微分的运算法则和高阶微分的运算法则与导数运算法则和高阶导数运算法则相同，这里不再重述．

例 8　设 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$，计算 d^2y．

解　$\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y&=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sin x}\cos x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x^2\\&=(\mathrm{e}^{\sin x}\cos^2x-\mathrm{e}^{\sin x}\sin x)\mathrm{d}x^2.\end{aligned}$$

例 9 若 $y=\ln x$，x 是 t 的函数且至少有三阶导数，计算 $\mathrm{d}^2 y$，$\mathrm{d}^3 y$.

解 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$，

$$\mathrm{d}^2 y=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{1}{x}\mathrm{d}^2 x,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3 y&=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{1}{x}\mathrm{d}^2 x\right)\\&=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x^2+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}(\mathrm{d}x^2)+\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}^2 x+\frac{1}{x}\mathrm{d}(\mathrm{d}^2 x)\\&=\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x^3-\frac{1}{x^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 x-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 x+\frac{1}{x}\mathrm{d}^3 x\\&=\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x^3-\frac{3}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}^2 x+\frac{1}{x}\mathrm{d}^3 x.\end{aligned}$$

假设 $x=\sin t$，以 t 为自变量计算 $\mathrm{d}^2 y$，将 $x=\sin t$ 代入上面的计算结果，验证用两种方法计算的结果是否相同.

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sin t}\cos t\mathrm{d}t=\cot t\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}^2 y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\cot t\mathrm{d}t)=-\csc^2 t\mathrm{d}t^2.$$

按上面的计算结果有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 y&=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x^2+\frac{1}{x}\mathrm{d}^2 x\\&=-\frac{1}{\sin^2 t}\cos^2 t\mathrm{d}t^2+\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}(\mathrm{d}\sin t)\\&=-\cot^2 t\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}t^2\\&=-(1+\cot^2 t)\mathrm{d}t^2\\&=-\csc^2 t\mathrm{d}t^2.\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{d}^3 y$，两种算法结果也一样（略）.

显然，直接对自变量求微分较不易出错.

4.3.4 微分应用

数学分析里不少应用都和数值计算有关，也就是求近似解.

微分应用实质上是差分应用，是忽略 Δx 的高阶无穷小量后的数值算法，微分计算的前提为 Δx 是一小量.

用微分计算函数的增值的计算公式为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x\approx f'(x)\Delta x$$

或

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x .$$

例 10　计算 $\sqrt[5]{1.03}$.

解　令 $f(x)=\sqrt[5]{x}$， $x=1$， $\Delta x = 0.03$.

$$f(1+\Delta x) \approx f(1) + \frac{1}{5}\Delta x = 1.006.$$

例 11　计算 $\sqrt[5]{245}$.

解　$\sqrt[5]{245} = \sqrt[5]{243+2} = 3\times\sqrt[5]{1+\dfrac{2}{243}}$，令 $f(x)=\sqrt[5]{x}$， $x=1$， $\Delta x = \dfrac{2}{243}$，则

$$f(1+\Delta x) \approx f(1) + \frac{1}{5}\Delta x = 1 + \frac{2}{5\times 243} = 1.0016，故$$

$$\sqrt[5]{245} \approx 3\times 1.0016 = 3.0048 .$$

例 12　计算 $\sin 30^\circ 15'$ 的近似值.

解　首先将角度转换为弧度，$30^\circ 15' = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{13\pi}{60\times 180} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{13\pi}{10800}$，令 $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，即取 $x = \dfrac{\pi}{6}$， $\Delta x = \dfrac{13\pi}{10800}$， $\pi \approx 3.1416$，所以

$$f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{13\pi}{10800}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\frac{\pi}{6}\Delta x \approx 0.5016 .$$

用微分也可估计计算误差.

我们知道，误差可分为模型误差、测试误差、截断误差和舍入误差四种，这四种误差是先天误差，计算时还要产生误差．误差不是失误引起的，而是不可避免的，这里只考虑测试误差引起的计算误差.

任何精密的仪器仪表都不可避免地有测试误差，测试误差大小不超过该仪器仪表最小刻度的一半．不过仍以这个值为测试误差，测试误差大小也标志该测量仪器的精度，故也称为测试精度，计算误差的估计算式为

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha x \approx f'(x)\Delta x ,$$

上式中 Δx 为测试误差， Δy 为计算误差.

例 13　设用某测量工具测得球体直径为 42 cm，测量工具的精度为 0.05 cm，试求球体体积的最大（绝对）误差.

解　球体体积理论值为 $V = \dfrac{\pi}{6}d^3$.

按题意有 $\Delta d = \pm 0.05$，由此有

$$\frac{\pi}{6}(d-\Delta d)^3 \leqslant \frac{\pi}{6}d^3 \leqslant \frac{\pi}{6}(d+\Delta d)^3 .$$

对于这类问题，误差的正负用户一般不感兴趣，感兴趣的是误差的绝对值，故只取

$\Delta d = 0.05$，按 Δy 的计算公式则有

$$\Delta y \approx \left(\frac{\pi}{6}d^3\right)'\Delta d = \frac{\pi}{2}d^2\Delta d \approx \frac{3.14}{2}\times 42^2 \times 0.05 = 138.54\ \text{cm}^3 .$$

说明：

（1）这里涉及符号常量 π 的取值．由于测试精度只取了小数点后的两位数字，故 π 的取值为 3.14（小数位取多了无意义！)，上例我们取 3.1416，原因是最终结果取了小数点后 4 位，因本书不是计算方法，故这里不详细介绍．

（2）有时用户对相对误差感兴趣（算例略)．

实际上，若制作直径为 0.1 cm 的小球，当直径的测试误差为 0.05 cm 时，则这就不能称为误差，而应称为失误．

4.4 含参变量的函数导数计算

在解析几何中，曲线可用笛卡儿坐标系中 y 和 x 的关系表示，对于多值函数且算式复杂的函数，常引入参变量，含参变量的函数实质上是用同一意义的变量作自变量的一组函数，因此其导数和高阶导数计算法则和一般函数的导数和高阶导数的计算法则完全一样．

参数方程主要用于描绘曲线，此时曲线在某点的切线和法线按下面算式计算？

用 $x=\varphi(t)$， $y=\psi(t)$ 表示一条曲线，现在介绍该曲线的切线和法线计算公式．

现在假设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且有连续的单值反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，当 $\varphi'(t)\neq 0$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\varphi'(t)} .$$

把 $t=\varphi^{-1}(x)$ 代入 $y=\psi(t)$ 得

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} .$$

由此得出 $t=t_0$ 的曲线的切线方程和法线方程．

切线方程为

$$y-y_0=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}(x-x_0) ,$$

而**法线方程**为

$$(x-x_0)\varphi'(t_0)+(y-y_0)\psi'(t_0)=0 .$$

如果 $\varphi''(t)$， $\psi''(t)$ 也存在，则 y 对 x 的二阶导数可按复合函数的导数计算法则计算，算式为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\phi''(t)\psi'(t)}{(\phi'(t))^2}\frac{1}{\phi'(t)}$$

$$=\frac{\psi''(t)\phi'(t)-\phi''(t)\psi'(t)}{(\phi'(t))^3}.$$

例 1　计算椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程.

解　令 $\varphi(t)=a\cos t$，$\psi(t)=b\sin t$，$t_0=\frac{\pi}{4}$，$y_0=\psi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}b}{2}$，$x_0=\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}a}{2}$，则

$$\varphi'(t)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-a\sin t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\psi'(t)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=b\cos t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}b.$$

由此得切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\Big/\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$$

$$=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}b}{\frac{\sqrt{2}}{2}b},$$

整理得

$$bx+ay=\sqrt{2}ab.$$

法线方程为

$$(x-x_0)\varphi'(t_0)+(y-y_0)\psi'(t_0)$$
$$=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b=0,$$

整理得

$$ax-by=\frac{\sqrt{2}}{2}(a^2-b^2).$$

4.5　微分学的几个基本定理

前面几节主要介绍如何求导数，本节介绍怎样利用导数概念对函数性质做进一步研究．本节介绍的几个定理是微分学的基础，微分学的不少重要应用都建立在这些基础上．

4.5.1 罗尔定理

【定理 1】若函数 $f(x)$， $x\in[a,b]$ 满足

（1）在 $[a,b]$ 上连续；

（2）在 (a,b) 上可导；

（3） $f(a)=f(b)$.

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，有

$$f'(\xi)=0\ .$$

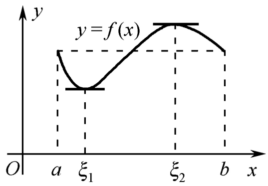

图 4-5

这个定理称为罗尔定理．罗尔定理的几何意义如图 4-5 所示．

证明 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有最大值 M 和最小值 m . 当 $M=m$ 时 $f(x)$ 为一平行于 x 轴的直线，定理显然成立；当 $M>m$ 时，至少在 (a,b) 上有一点 ξ 取得最大值或最小值， ξ 是极值点，由条件（2）即 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，按费马定理有 $f'(\xi)=0$.

罗尔定理中三个条件缺一不可，为什么？请同学们自己思考．

由罗尔定理可得出若 $f'(x)$ 满足罗尔定理的三个条件，且可直接导出，若 $f'(x)=0$ 有 k 个实根，则 $f(x)=0$ 有 $k+1$ 个实根．由罗尔定理推导出的下一定理用处更大.

4.5.2 拉格朗日中值定理

【定理 2】若函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 上可导；

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\ .$$

这个定理通常称为拉格朗日中值定理.

证明 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ .$$

显然 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理有，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\begin{aligned}F'(\xi)&=f'(\xi)-(f(a))'-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\xi-a)'\\&=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\ .\end{aligned}$$

即

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\ .$$

拉格朗日中值定理的几何意义如图 4-6 所示.

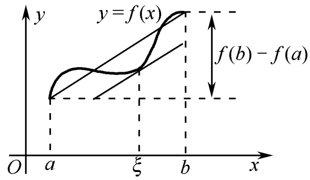

图 4-6

拉格朗日中值定理还可通过三种算式表示：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)，\quad a<\xi<b$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)，\quad 0<\theta<1$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h，\quad 0<\theta<1 .$$

【推论 1】 若在某区间 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)=C$（常数）.

证明　在区间内任意取一定点 x_0，由拉格朗日中值定理有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)=0 .$$

由此有

$$f(x)=f(x_0) .$$

由 x_0 的任意性有

$$f(x)=C \text{（常数）}.$$

【推论 2】 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某一区间内导数处处相等，则

$$f(x)-g(x)=C \text{（常数）}.$$

证明　作辅助函数

$$F(x)=f(x)-g(x)$$

$$F'(x)=(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)\equiv 0 .$$

由推论 1 有 $F(x)=C$，即

$$f(x)-g(x)=C .$$

这两个定理虽然简单，但今后在不定积分中将用到它们.

例 1　证明 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

证明　令 $f(x)=\arcsin x$， $g(x)=-\arccos x$， $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=g'(x)$.

由此有

$$F(x)=f(x)-g(x)=C .$$

取 $x=0$， $\arcsin 0=0$， $\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$，于是有

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2} .$$

同样可以证明 $\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\dfrac{\pi}{2}$.

【推论 3】 如果在某区间 I 上 $f'(x)>0$，那么在这个区间 $f(x)$ 是严格上升的，如果在某区间 I 上 $f'(x)<0$，那么在这个区间 $f(x)$ 是严格下降的.

证明 设 $x_2 > x_1$，当 $f'(x) > 0$，由拉格朗日中值定理有

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

即

$$f(x_2) > f(x_1).$$

对于推论的第二部分，证明方法与第一部分一样，证明略.

利用这一推论可以研究函数在定义域的各子区间的变化.

例 2 研究函数 $f(x) = (x-1)^2(x-2)^3$（$-\infty < x < \infty$）的变化情况.

解 这个函数的导函数为

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)^3 + 3(x-1)^2(x-2)^2 = (x-1)(5x-7)(x-2)^2.$$

函数在 $x=1$，$x=\dfrac{7}{5}$，$x=2$ 这三个点取 0 值，现将该函数的定义域分成 4 个子区间，并计算各区间导数值，其结果如表 4-1 所示.

表 4-1

	$(-\infty,1)$	$(1,7/5)$	$(7/5,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	+	−	+	−
$f(x)$	上升	下降	上升	上升

在 $x=1$ 点函数 $f(1)=0$ 由上升变为下降. $x=1$ 处取极大值；在 $x=\dfrac{7}{5}$ 处函数由下降转上升，函数取极小值 $-\dfrac{108}{3215}$；函数在 $x=2$ 处也为 0，虽然 $f'(2)=0$，但不是极值点. 由于我们对导数的研究还不够，故尚找不出原因，$f(x)$ 的图形如图 4-7 所示.

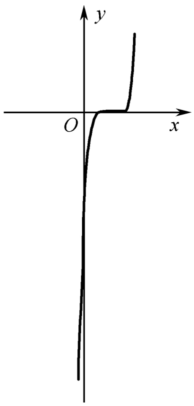

图 4-7

利用推论 3 还可以证明一些有用不等式.

例 3 证明对区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 中的任意 x，恒有不等式

$$\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}.$$

证明 令 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$，只须证明 $f(x)$ 是单调下降的，则不等式自然成立，事实上

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} > x$，$\cos x > 0$，$x^2 \geqslant 0$，$x\cos x < \sin x$，所以 $f'(x) < 0$，$f(x)$ 是单调下降的.

4.6　泰勒级数

幂级数是连续性最好的函数，也是计算最简单、最方便的函数，利用秦九韶法计算一个 n 阶幂级数值只须用 n 次乘法 n 次加法，此外对幂级数作微积分运算也非常方便.

泰勒级数是人们用以逼近较复杂函数的幂级数，本章介绍该组级数的理论算法，下一章特别给出少见的数值算法.

4.6.1　泰勒公式

在介绍微分应用时曾给出了公式

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x)+f'(x)\Delta x+o(\Delta x) \\ &= f(x)+f'(x)(x-x_0)+o(x-x_0) \\ &\approx f(x)+f'(x)(x-x_0). \end{aligned}$$

这个公式的缺点是计算精度太低，误差 Δ 为 $o(\Delta x)$ ，若 $f(x)$ 在 x_0 处存在 n 阶导数，泰勒给出了泰勒级数

$$\begin{cases} T_n(x)=f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}\Delta x+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n \\ \Delta x=x-x_0 \end{cases}$$

显然， $T_n^{(k)}(x_0)=f_n^{(k)}(x_0)$ ， $k=0,1,\cdots,n$.

泰勒级数的计算精度有多高呢？

【定理】若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 $n+1$ 阶导数，则

$$\left|f(x)-T_n(x)\right|=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) .$$

证明　令 $f(x)-T_n(x)=\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q_n(x)=R_n(x)$ ，现在的任务是确定 $Q_n(x)$. 作辅助函数

$$F(t)=f(x)-f(t)-(x-t)f'(t)+\cdots+(x-t)^n\frac{f^{(n)}(t)}{n!}+\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q_n(x) ,$$

此处 x 是变量 t 的一个可取值.

显然 $F(x)=F(x_0)=0$ ，由罗尔定理有，存在 ξ （在 x 和 x_0 之间）使得 $F'(\xi)=0$ ，即

$$-f'(\xi)+\left(f'(\xi)-(x-\xi)f''(\xi)\right)+\cdots+\left(\frac{n(x-\xi)^{n-1}}{n!}-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\right)+\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(n+1)!}Q_n(x)$$

$$=-\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^n}{n!}Q_n(x)=0 .$$

由此有

$$Q_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\ ,$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ .$$

由上面 $R_n(x)$ 的计算过程可直接得到：

【泰勒定理】如果函数 $f(x)$ 在含有点 x_0 的某一区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数，则对 (a,b) 中的任意点 x，恒有等式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\ .$$

式中，$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

这个公式称为**泰勒公式**. 与拉格朗日中值定理一样，$R_n(x)$ 也可写成

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}，\ 0<\theta<1\ .$$

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式可简化成

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}，\ 0<\theta<1\ .$$

这个公式称为**麦克劳林公式**.

这里要说明的是，对于 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，即使 $|x-x_0|$ 相当小，也不一定 n 愈大其值愈小，因为 $R_n(x)$ 中有一项是 $f^{(n+1)}(\xi)$，n 愈大，$R_n(x)$（绝对）值愈小是有前提的，这些将在下册介绍.

4.6.2 五个基本初等函数的麦克劳林算式

这一小节我们给出几个常用的基本初等函数的麦克劳林算式.

（1）$f(x)=\mathrm{e}^x$.

由于 $(\mathrm{e}^x)^{(k)}\equiv\mathrm{e}^x$，$\mathrm{e}^x\big|_{x=0}=1$，所以可立即得出 e^x 的麦克劳林算式

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\theta^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}+\frac{\theta^{n+1}}{(n+1)!}，\ 0<\theta<1\ .$$

（2）$f(x)=\sin x$.

$$(\sin x)^{(k)}=\sin x\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)，\ (\sin x)^{(k)}\Big|_{x=0}=\begin{cases}0 & k=2m\\(-1)^m & k=2m+1\end{cases}，\text{由此有}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x)$$

$$R_{2m}(x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin(\theta x + \frac{2m+1}{2}\pi) .$$

（3） $f(x) = \cos x$.

用完全同样的方法可得到

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}\cos(\theta x + m\pi) .$$

（4） $f(x) = (1+x)^\alpha$， α 为任意实数.

由于

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$$

所以可得到

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}，\quad 0<\theta<1 .$$

以上四个公式对于 $-\infty < x < \infty$ 都有意义，且保证 n 愈大 $|R_n(x)|$ 愈小.

（5） $f(x) = \ln(1+x)$， $x > -1$.

$$(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}，\quad \left(\ln(1+x)\right)^{(k)}\Big|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!，\text{由此有}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}，\quad 0<\theta<1 .$$

显然，当 $|x|>1$ 时， n 愈大 $|R_n(x)|$ 愈大.

思　考　题

1．函数在某点的连续性和可微性间关系怎样？两者是否等价？试举例说明之.

2．（1）若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，而函数 $g(x)$ 在点 x_0 不可微，和函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在点 x_0 可微否？

（2）若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 都不可微，和函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在点 x_0 是否可微？乘积函数 $F(x) = f(x)g(x)$ 在点 x_0 是否可微？（提示：考虑例子 $f(x) = |x|$， $g(x) = -|x|$ 在 $x = 0$ 点的情况.）

3．微商能否用下述算式定义？

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

4．如果在区间$[a,b]$上有不等式$f(x) \geqslant g(x)$，是否可由此导出$f'(x) \geqslant g'(x)$？试举例说明.

5．把那些应该牢记的微商和微分公式默写出来.

6．微分概念是怎样引入的？它和函数的改变量有什么关系？

7．用几何图形表示函数的微分与函数的改变量间的关系．从图形可以看出什么样的函数，它的微分恒等于它的改变量？

8．记号$\mathrm{d}x^3$，$(\mathrm{d}x)^3$和$\mathrm{d}(x^3)$有什么区别？

9．用公式

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

作近似计算时，对Δx有什么要求？为什么？

10．最大值和极大值有什么区别？有什么联系？

11．设$f(x)$在x_1取得极大值，在x_2取得极小值，是否可说明$f(x_1)>f(x_2)$，试画图说明之.

12．若函数$f(x)$在点x_0的微商为 0，是否一定在x_0点取得极值？

13．在罗尔中值定理中，若$f(a)=f(b)$不成立，那么结论不成立，试举例说明.

习　　题

1．设自变量的增量Δx等于（1）2，（2）1，（3）0.5，求在点$x=2$处函数$y=x^2$的增量Δy.

2．试求函数$y=x^2$的函数增量和自变量的比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

（1）当$x=1$，$\Delta x=0.1$时；

（2）当$x=1$，$\Delta x=0.01$时.

3．质点作直线运动，运动方程是$x=5t^2+6$.

（1）求$2 \leqslant x \leqslant x+\Delta t$时间内的平均速度，设$\Delta t=1$，0.1，0.01，0.001；

（2）从上面平均速度的趋势，估计$t=2$ s 的瞬时速度；

（3）由瞬时速度的定义，算出$t=2$时刻的瞬时速度.

4．有密度分布不均匀的细杆AB，其长度$l=20$ cm，AM段的质量与到A的长度平方成正比，已知当$AM=2$ cm 时质量为 8 g，求

（1）$AM=2$ cm 段的平均线密度；

（2）全杆的平均线密度；

（3）任意点的线密度.

5．设$f(x)=x^3$，求$f'(1)$，$f'(0)$，$f'(-2)$，$f'(-\sqrt{2})$.

6．求下列函数的导数．

（1）$y=5x^2-6x-3$

（2）$y=ax^3+bx^2+cx+d$

（3）$y=\sqrt[5]{x}+\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{b}{\sqrt[5]{3}}$

（4）$y=x^3\sqrt[5]{x}$

（5）$y=\dfrac{x+1}{x+2}$

（6）$y=\dfrac{3x^2-9x-2}{5x+3}$

（7）$y=\sin x\cos^3 x$

（8）$y=\sin x\tan x+\cot x$

（9）$y=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{x^3+\tan x}$

（10）$y=\dfrac{0.3x^5+a\sin x}{(a+b)\cos x}$

7．求曲线 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 点的切线方程和法线方程．

8．在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标 $x_1=1$，$x_2=3$ 两点，过这两点引割线，问抛物线上何点的切线与割线平行？

9．抛物线 $y=x^2$ 上何点的切线与 $3x-y+1=0$ 构成 45° 角？

10．验证对于函数 $y=x^2$，关系式 $f'(a+b)=f'(a)+f'(b)$．

11．求下列函数的导数．

（1）$y=\dfrac{\ln x}{x^\mu}$

（2）$y=a^x\ln x$

（3）$y=\dfrac{x+\arcsin x}{\sin x}$

（4）$y=\dfrac{t^3\arctan t}{e^t}$

（5）$y=(a^2+b^2)e^x x^a\arctan x$

（6）$y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

12．设 $f(z)=\dfrac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$，求 $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$．

13．设 $P(\varphi)=\dfrac{\varphi}{1-\varphi}$，求 $P'(2)$，$P'(0)$．

求下列各题中函数的微商．

14．$y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$

15．$y=\sin^\alpha x\ln^\beta x$

16．$y=\sqrt[3]{1+\ln^3 x}$

17．$r=\sqrt{1+\varphi^2}\arctan(\varphi^3)$

18．$y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

19．$y=(\arcsin x+\arccos x)^\alpha$

20．$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

21．$\omega=z5^z$

22．$y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$

23．$y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

24．$y=\sin(\sin(\sin x))$

25．$y=\sin(\cos^3(\arctan x^3))$

26．$y=\sec^2\dfrac{x}{a^2}+\tan\dfrac{x}{b^2}$

27．$y=e^{\sqrt{x^2+1}}$

28．$y=a^{x}\mathrm{e}^{\sin\tan x}$

29．$y=\cos\dfrac{1}{x^{2}}\mathrm{e}^{\cos\frac{1}{x^{2}}}$

30．$y=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^{2}+2x}}$

31．$y=3\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{ax^{2}+bx+c}}$

32．$y=x^{x^{2}}$

33．$y=x^{\frac{1}{x}}$

34．$y=x^{x^{x}}+x^{x}+x$

35．$y=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}$

36．$y=a^{a^{x}}+a^{x^{a}}+x^{a^{x}}$

37．$y=(\sin x)^{\cos x}$

38．$y=(\tan x)^{\cot\frac{x}{b}}$

39．$y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$

40．$y=(\ln x)^{x}x^{\ln x}$

41．$y=\arcsin(\sin x^{2})$

42．$y=\arccos(\sin^{2}x-\cos^{2}x)$

43．$y=\dfrac{1}{\arcsin(\sin^{2}x)}$

44．$r=\arctan\left(\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)$

45．$\rho=\dfrac{2}{\sqrt{a^{2}-b^{2}}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{\varphi}{2}\right)$

46．$y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+\dfrac{a^{2}}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$

47．$y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^{2}}}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

48．$y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^{2}+\sqrt{2}x+1}{x^{2}-\sqrt{2}x+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\sqrt{2}x}{x^{2}-1}$，证明$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x^{4}+1}$．

49．$z=\arctan(\lambda+\sqrt{1+\lambda^{2}})$

50．$y=\ln(\mathrm{e}^{x}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$

51．$y=\arcsin\left(\dfrac{\sin a\sin x}{1-\cos a\cos x}\right)$

在下列各题（52～55 题）中，设$\varphi(x)$，$\psi(x)$均为已知的可微函数，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

52．$y=\sqrt{\varphi^{2}(x)+\psi^{2}(x)}$

53．$y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$

54．$y=\left(\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^{\ln\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}$

55．$y=\arctan(1+\varphi(x))+\varphi(x)^{\psi(x)}$

在下列各题中，f 为已知的可微函数，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

56．$y=f(x^{3})$

57．$y=f(\sin^{3}x)+f(\cos^{3}x)$

58．$y=f(\mathrm{e}^{x}+x^{\mathrm{e}})$

59．$y=\sin\big(f(\sin(f(x)))\big)$

60．$y=f(f(\sin x+\cos x))$

61．$y=f(\mathrm{e}^{x})\mathrm{e}^{f(x)}$

62．设$A=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2\lambda}{1-\lambda^{2}}$，$B=\arctan\lambda$，求证$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\lambda}=\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\lambda}$．

63．验证函数$y=\ln\dfrac{1}{1+x}$满足关系式$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=\mathrm{e}^{y}$．

64．验证函数 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$ 满足方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$．

65．设 $y=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}$，试证 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} f_{11}'(x) & f_{12}'(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}'(x) & f_{22}'(x) \end{vmatrix}$．

66．计算 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -3 & x \end{vmatrix}}{\mathrm{d}x}$．

67．一气球从离开观察员 500 m 处垂直上升，其速率为 140 m/min，当气球升高到 500 m 时，此观察员之视线的斜角增加率是多少？

68．有一长度为 5 m 的梯子贴靠墙上，假设在力作用下沿地板以 3 m/s 的速度离开墙脚滑动，问当其下端离开墙脚 1.4 m 时梯子下端的移动速度是多少？

69．落在平静水面上的石块，产生同心波纹，若最外一圈波半径增大率恒为 1 m/s，问在 2 s 中未被扰动水面面积之增大率是多少？

70．求下列函数的二阶导数．

（1）$y=\mathrm{e}^{-x^2}$　　（2）$y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

（3）$y=x^2a^x$　　（4）$y=\sin x\arctan\dfrac{x}{a}$

71．设 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}\cos(\sin x)$，求 $f(0)$， $f'(0)$， $f''(0)$．

72．设 $\mu=\varphi(x)$ 及 $\nu=\psi(x)$ 为可微分二次的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，（1） $y=\ln\dfrac{\mu}{\nu}$，（2） $y=\sqrt{\mu^2+\nu^2}$．

73．设 $f(x)$ 有三阶连续导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$， $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$，（1） $y=f(x^2)$，（2） $y=f(\mathrm{e}^x+x)$．

74．应用莱布尼兹公式计算以下各式：

（1）$(x^2\mathrm{e}^x)^{(50)}$　　（2）$(\ln(1+x)^x)^{(30)}$

75．验证函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ 满足关系式

$$y''-y'+y\mathrm{e}^{2x}=0.$$

76．验证函数 $y=\cos\mathrm{e}^x+\sin\mathrm{e}^x$ 满足关系式

$$y''-y'+y\mathrm{e}^{2x}=0.$$

77．验证函数 $y=A\sin(\omega x+\delta)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2y=0.$$

78．对于函数 $y=x^2$，计算当 $x=1$ 变到 $x=1.02$ 时，函数的增量 Δy 等于多少？ Δy 的主要部分 $\mathrm{d}y$ 等于多少？

79．一个边长等于 8 cm 的正方形，如果每边增加

（1）1 cm　　（2）0.5 cm　　（3）0.1 cm

那么正方形的面积增加多少？并求这个面积增量的主要部分．

80．求下列各函数的微分：

（1） $y=0.3x^{0.5}$ （2） $y=\dfrac{t^3}{1-t^2}$

（3） $r=\sin\varphi+\cos\varphi$ （4） $y=a^{\ln\tan x}$

81．当 φ 由 $\dfrac{\pi}{6}$ 变到 $\dfrac{61}{360}\pi$ 时，求 $y=\sin 2\varphi$ 的微分.

82．验证函数 $y=\dfrac{1+\ln x}{1-x\ln x}$ 满足关系式

$$2x^2\mathrm{d}y=(x^2y^2+1)\mathrm{d}x\ .$$

83．当 $|x|$ 很小时，证明近似等式 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$：

（1） $\sin x\approx x$ （2） $\ln(1+x)\approx x$ （3） $\tan x\approx x$

84．近似计算（1） $\sqrt[5]{1.01}$，（2） $\sqrt[7]{100}$，（3） $\sqrt[10]{1000}$.

85．近似计算（1） $\sin 29^\circ$，（2） $\ln 1.03$.

86．对于以下两种情形：（1） x 为自变量；（2） x 为中间变量，分别求函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的一阶微分 $\mathrm{d}y$ 和二阶微分 d^2y .

87．设 μ 和 ν 是以 x 为自变量的可微分二次的函数，对下列函数求 d^2y：

（1） $y=\dfrac{\mu}{\nu}$ （2） $y=\mu\nu$

88．设 $y=\sin x$， $x=\mathrm{e}^t$，（1）试用 μ 和 x 表示 d^2y；（2）用 t 和 $\mathrm{d}t$ 表示 d^2y .

89．在下列参数方程中，求 y 关于 x 的微商：

（1） $x=a\cos\varphi$， $y=b\sin\varphi$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（2） $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$；

（3） $x=\ln(1+t^2)$， $y=t-\arctan t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

90．写出下列曲线在已给点处的切线和法线方程：

（1） $x=a(t-\sin t)$， $y=\cos 2t$，在 $t=\pi$ 处；

（2） $x=\sin t$， $y=\cos 2t$，在 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 处；

（3） $x=\dfrac{3at}{1+t^2}$， $y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}$，在 $t=2\pi$ 处.

91．验证罗尔中值定理对函数 $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$ 在区间 $[-1,2]$ 上的正确性.

92．验证拉格朗日定理对函数 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上的正确性.

93．不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的微商，应用罗尔定理，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个根.

94．应用罗尔定理证明： $x^3-3x+c=0$ 在区间 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的根，其中 c 为任意实数.

95．证明下列恒等式：

（1）$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$；

（2）$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$，当$|x|<\dfrac{1}{2}$.

96．利用拉格朗日定理证明不等式：

（1）设$a<b$，则当$n>1$时有不等式$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$；

（2）当$x\neq 0$时，$e^x>1+x$；

（3）如果$0<b\leqslant a$，试证$\dfrac{a-b}{a}\leqslant\ln\dfrac{a}{b}\leqslant\dfrac{a-b}{b}$.

97．若$\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，而当$x>0$时，$\varphi''(x)>0$，求证当$x>0$时恒有$\varphi(x)>0$.（提示：应用中值定理先利用$\varphi''(x)>0$来研究$\varphi'(x)$的符号，再利用$\varphi'(x)$来研究$\varphi(x)$.）

98．证明函数$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$在区间$(-2,1)$单调下降.

99．证明函数$y=x^2+x$在区间$(-\infty,\infty)$单调上升.

100．证明函数$y=\arctan x-x$在区间$(-\infty,\infty)$上单调下降.

101．利用函数的单调性，证明下列不等式：

（1）当$x\neq 0$时，$e^x>1+x$；

（2）当$x>0$，$\ln(1+x)<x$；

（3）当$x>0$，$\ln(1+x)\geqslant\dfrac{\arctan x}{1+x}$；

（4）如果$0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$，证明$\dfrac{\tan x_1}{\tan x_2}>\dfrac{x_2}{x_1}$.（提示：函数$y=\dfrac{\tan x}{x}$.）

102．按$x-4$的乘幂展开多项式$x^4-5x^3+x^2-3x+2$.

103．按$x-1$的乘幂展开函数$f(x)=x^6$.

104．应用泰勒公式按x的乘幂展开$f(x)=(x^2-3x+1)^3$.

105．已知$f(x)$是一个四次多项式，并且$f(2)=-1$，$f'(2)=0$，$f''(2)=2$，$f'''(2)=-12$，$f^{(4)}(2)=24$，试计算$f(-1)$，$f'(0)$，$f''(1)$.

106．求函数$y=\dfrac{1}{x}$在$x_0=-1$展开的n阶泰勒级数.

107．写出函数xe^x的n阶麦克劳林展开式.

108．求函数$y=\sqrt{x}$在$x_0=4$的三阶泰勒展开式.

109．证明$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{x^3}{16(1+\theta x)^{5/2}}$，$0<\theta<1$.

110．利用函数$f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2$在$x_0=1$点的泰勒展开式的前三项计算$f(1.03)$的近似值.

111．利用函数$f(x)=x^{50}-x^{40}+x^{20}$在$x_0=1$点的泰勒展开式的前三项计算$f(1.005)$的近似值.

112．应用三阶泰勒公式，求下列数的近似值，并估计误差：

（1）$\sin 18^\circ$　　（2）$\sqrt[3]{30}$

（3）$\sqrt[5]{250}$　　（4）$\ln 1.2$

113．计算e的近似值，使误差不超过10^{-4}.

第 5 章　微分学应用

微分学应用包含理论上的应用和数值计算方面的应用.

函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限主要取决于 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内的函数性质，也就是取决于它的局部性质，通常泰勒级数也只是 $\Delta x=|x-x_0|$ 较小时意义才大，因此有可能利用泰勒级数解决第 3 章所不能解决的某些极限问题.

第 3 章提及有些极限问题当时无法解决，有些极限问题计算难度较大，有了本章的洛必达法则，下列问题就容易得到解决，这些问题包括：

（1）部分 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{0-0}{0}$ 型不定式问题；

（2）部分 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式问题；

（3）部分 1^∞ 型和 $(1+0)^\infty$ 型问题；

（4）部分 0^0 型和 ∞^0 型问题.

5.1　洛必达法则

5.1.1　洛必达法则理论依据

利用泰勒级数计算某些极限的法则称为洛必达法则.

【定理】 如果函数 $f(x)$, $g(x)$ 在包含点 x_0 的邻域内有足够高的高阶导数，且 $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$,⋯, $f^{(n)}(x_0)=0$, $g'(x_0)=0$,⋯ , $g^{(n)}(x_0)=0$ ，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}$$

证明　把函数 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 按泰勒级数展开，由已知有

$$f(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$g(x)=\frac{g^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ξ_1 和 ξ_2 都位于 x 和 x_0 之间，当 $x\to x_0$ 时， $\xi_1\to x_0$ ， $\xi_2\to x_0$ ，所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}$$

特别地，当 $n=0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

由上面定理知，洛必达法则可以计算 $\frac{0}{0}$ 型极限，由于 $\frac{0}{0}$ 型极限可转换成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，故也可计算 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限．由此还知，若要计算极限，当极限类型不属于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型时，应通过代数变换或恒等变换将极限转换成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型．

5.1.2　洛必达法则计算算例

例 1　计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$.

解　上式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{2x}-1)'}{(\ln(1+x))'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}}{\dfrac{1}{1+x}}=2$.

例 2　计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解　上式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$

由于不知应对分子分母求多少阶导数才能算出极限，故只能逐一对分子分母先求导数，再求二阶导数……直至能算出极限为止．

例 3　计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

解　上式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$

例 4　计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解　上式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=0$

注：本例需要将极限类型先转换成 $\frac{0}{0}$ 型．

例 5　计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\arctan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}}$

解 上式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+(x-\frac{\pi}{2})^2}=1$.

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{e^x}$，$\mu>0$.

解 上式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu x^{n-1}}{e^x}$

$=\cdots$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)x^{\mu-n}}{e^x}=0$.

本例可直接利用 e^x 是 x^μ ($x\to\infty$)的高阶无穷大量得出极限为 0.

例 7 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\mu}$，$\mu>0$.

解 上式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mu x^\mu}=0$.

从上面两例计算结果知，当 $x\to+\infty$ 时，e^x 是 x^μ ($\mu>0$)的高阶无穷大量，而 x^μ ($\mu>0$)是 $\ln x$ 的高阶无穷大量.

例 8 计算 $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 这是一个1^∞型极限. 令 $y=x^{\frac{1}{1-x}}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln x}{1-x}$，而

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1,$$

即

$$\lim_{x\to1}\ln y=\ln(\lim_{x\to1}y)=-1.$$

所以

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}.$$

本例可不使用洛必达法则计算，但计算难度大（见第 3 章），使用洛必达法则后计算难度则大大降低了.

例 9 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}$.

解 这是一个∞^0型极限，令 $y=(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln x}$，而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=1,$$

于是有

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}.$$

上面两例通过对数运算将指数函数转换成 $\dfrac{\mu(x)}{\nu(x)}$ 后，才能利用洛必达法则.

例 10　计算 $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

解　这是一个 0^0 型极限问题.

$$x^x=\mathrm{e}^{x\ln x},\quad \ln x^x=x\ln x,$$

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}x^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}x\ln x}=\mathrm{e}^0=1.$$

对于例 10，也可令 $y=x^x$，则 $\ln y=x\ln x$，而

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}y=1.$$

显然，利用对数运算及极限理论可简化极限计算.

例 11　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)^{\sin x}$.

解　$\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)^{\sin x}=\mathrm{e}^{-\sin x\ln\tan x}$，而

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln\tan x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\tan x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x}=0,$$

由此有

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\tan x}\right)^{\sin x}=1.$$

例 12 计算 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 这也是一个1^∞型极限，令 $y=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$，而

$$\lim_{x\to0}=\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{x\to0}y=e^{-\frac{1}{2}}.$$

利用泰勒级数和等价替换很容易计算本例：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}&=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)^{\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{-2}{x^2}\left(-\frac{1}{2}\right)}\\&=e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

所有$\dfrac{0}{0}$型，$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限问题都可用洛必达法则求其极限，而对于1^∞型极限，若一时难以转换成标准的$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$，则可利用对数变换转换成$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型计算．同样$0^0$和$1^\infty$也可以通过对数变换转换成$\dfrac{0}{0}$型和$\dfrac{\infty}{\infty}$型计算其极限．总之，除了第 2 章中涉及$n!$和最后一类极限以及第 2 章、第 3 章计算的$\infty-\infty$型极限之外，其余都可利用洛必达法则求极限（对于数列极限要先转换成函数极限）．

例 13 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{24-12x^2+x^4-24\cos x}{(\sin x)^6}$.

解 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+o(x^6)$，故

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{24-12x^2+x^4-24+12x^2-x^4+\frac{1}{30}x^6}{x^6}=\frac{1}{30}.$$

例 14　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

解　上式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\left(1-\dfrac{(2x)^2}{2}\right)\left(1-\dfrac{(3x)^2}{2}\right)}{\dfrac{x^2}{2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2}{\frac{1}{2}x^2}=14.$$

对于例 13，由于 $\sin^6 x\sim x^6$，所以分子的 $\cos x$ 应展开成 6 阶泰勒级数，略去 $o(x^6)$ 部分. 同样，对于例 14，由于分母是 x^2 阶无穷小量，故分子中 $\cos x$， $\cos 2x$， $\cos 3x$ 都只能保留二阶无穷小量.

直接将函数作泰勒展开时要注意两点，第一点是各个函数所忽略的高阶无穷小应是同阶无穷小；第二点是所忽略的高阶无穷小应适当.

以上两例也可用洛必达法则求出极限.

5.1.3　使用洛必达法注意事项

1．应用洛必达法则求极限的函数必须是分式，且分子和分母的每一个独立的可变化项必须是无穷大量或无穷小量.

例 15　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

解　按 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限计算公式和计算过程得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1.$$

上式中分子和分母的主量都是 x． $\sin x=O(1)(x\to\infty)$ 不是无穷大量，不能使用洛必达法则.

2．应用洛必达法则求极限的函数中，分子和分母经求导后会变得简单而不是复杂．所有 $\infty-\infty$ 型问题的极限不宜用洛必达法则，求导后分子分母会出现根式的，也不宜用洛必达法则.

例 16　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^3+x}}{\sqrt{x+7}}$.

解　按 $\infty-\infty$ 型计算公式有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^3+x}}{\sqrt{x+7}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}-\frac{\sqrt{x^3-x^2}-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

若对例 16 用洛必达法则，则算式会变得愈来愈复杂而算不出极限.

例 17 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

本例也无须用洛必达法则.

5.2 极值问题

【定义 1】 对于函数 $f(x)$，$x\in U(x_0;\delta)$，若 $f(x_0)<f(x)$（$x\neq x_0$），则称 $f(x)$ 在 x_0 点取得**极小值**，若 $f(x_0)>f(x)$（$x\neq x_0$），则称 $f(x)$ 在 x_0 点取得**极大值**.

5.2.1 极值点和极值计算

极值问题是从一些实际问题提炼出来的数学问题，极值问题要利用导数知识.

例 1 如图 5-1 所示，有一块半径为 R 的圆铁皮，将其剪成一个扇形，现要将铁皮围成一个无底圆锥（见图 5-2），问剩下的铁皮中心角 α 应是多大时圆锥体积最大?

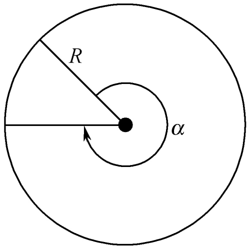

图 5-1

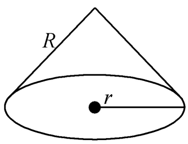

图 5-2

解 设圆锥半径为 r，则锥体底面半径 $r=\frac{R\alpha}{2\pi}$，锥高 $h=\sqrt{R^2-r^2}$，锥体体积为

$$V=\frac{1}{3}r^2h=\frac{1}{3}\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2-\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}.$$

例 2 设有一小船停在 O 处，OB 为运河，$AB=9$ km，$OB=15$ km，船行每小时 4 km，步行每小时 5 km，问何处上岸最快达到 A 点?

解　如图 5-3 所示，设在 C 点上岸，$x=CB$，则划船所用时间 $t_1=\dfrac{15-x}{4}$，走路所用时间 $t_2=\dfrac{AC}{5}=\dfrac{\sqrt{9^2+x^2}}{5}$，共用时间为

$$t=t_1+t_2=\frac{15-x}{4}+\frac{\sqrt{9^2+x^2}}{5}.$$

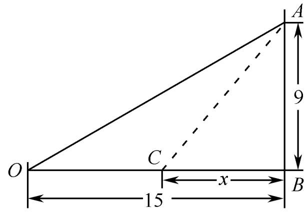

图 5-3

例 1 是一求极大值的问题，例 2 则是一个求极小值的问题，费马给出了计算极值问题的途径.

费马有关极值定理，只是必要性定理，为了彻底解决上面两例的极值计算，有必要给出充分性定理.

【定理】函数 $f(x)$ 在邻域 $U(x_0;\delta)$ 有足够高阶连续导数，若 $f^{(2k-1)}(x_0)=0$，$f^{(2k)}(x_0)\neq 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 上的极值点，其极值为 $f(x_0)$，当 $f^{(2k)}(x_0)>0$ 时为极小值，当 $f^{(2k)}(x_0)<0$ 时为极大值.

证明　将 $f(x)$ 在 x_0 点作 $2k-1$ 阶泰勒展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!}(x-x_0)^{2k-1}+\frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}(x-x_0)^{2k}$$

$$=f(x_0)+\frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}(x-x_0)^{2k}.$$

当 $f^{(2k)}(\xi)>0$ 时，$f(x_0)<f(x)$，即 x_0 为极小值点，$f(x_0)$ 为极小值；

当 $f^{(2k)}(\xi)<0$ 时，$f(x_0)>f(x)$，即 x_0 为极大值点，$f(x_0)$ 为极大值.

显然，当 $f^{(2k)}(x_0)=0$ 而 $f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$ 时无极值.

对于例 1 有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{R^3}{12\pi^2}\alpha\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}-\frac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2\frac{\alpha}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}=\frac{8\pi^2\alpha-3\alpha^3}{\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}}=0,$$

解之得 $\alpha=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\pi$ 或 0，显然 $\alpha=0$ 及 $\alpha=-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\pi$ 无意义，只有 $\alpha=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\pi$ 是解.

又由于 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{6}}<0$，所以当 $\alpha=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\pi$ 时取得极大值，剪去扇形后圆心角为

$$\alpha=2\pi-\frac{2}{3}\sqrt{6}\pi.$$

对于例 2 有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{4\sqrt{9^2+x^2}}-\frac{1}{5}=\frac{5x-4\sqrt{9^2+x^2}}{204\sqrt{9^2+x^2}}=0,$$

即 $25x^2-16x^2-324=0$，解之得 $x=\pm6$，显然只有 $x=6$ 才有意义，即所花时间为 $t=\frac{\sqrt{117}}{4}+\frac{9}{5}\approx4.5$ 小时.

例 3 重量为 G 的物体放在水平面上（见图 5-4），加一力 F 克服摩擦让其运动，问题是力应该与水平面夹角多大，使所加力最小（设摩擦系数为 μ）.

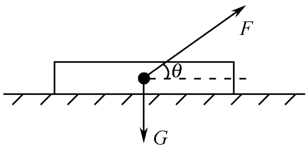

图 5-4

解 设所用力 F 与水平面成 θ 角，由于摩擦力与正压力成正比，物体所受（静）摩擦力（其方向与待运动方向相反）为

$$f_x=\mu(G-F_y)=\mu(G-F\sin\theta).$$

物体水平方向拉力等于摩擦力时物体开始运动（此后摩擦力会变小，但这与问题无关），即

$$F\cos\theta-\mu(G-F\sin\theta)=0.$$

故

$$F=\frac{\mu G}{\cos\theta+\mu\sin\theta},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

由于 μ 和 G 是常量，欲使 F 最小，只须分母最大，因

$$(\cos\theta+\mu\sin\theta)'=-\sin\theta+\mu\cos\theta=0,$$

故

$$\theta=\arctan\mu.$$

所用拉力为

$$F=\frac{\mu G}{\cos\arctan\mu+\mu\sin\arctan\mu}.$$

由于

$$(\cos\theta+\mu\sin\theta)''\Big|_{\theta=\theta_0}=-\sin\theta-\mu\cos\theta\Big|_{\theta=\theta_0}=\theta_0<0.$$

所以所求极值为极大值（分母），对于整个算式为极小值．同样可验证例 1 结果为极大值点，例 2 为极小值点.

5.2.2　拐点和曲线的凹凸性

上面已介绍了 $f^{(2k-1)}(x_0)=0$，$f^{(2k)}(x_0)\neq 0$（$k=1,2,\cdots$），则 x_0 点是函数 $f(x)$ 的极值点，当 $f^{(2k)}(x_0)=0$，$f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$（$k=1,2,\cdots$），x_0 点不是极值点．这样的点有一特殊名称——拐点．

【定义 2】若 $f(x)$ 有 $f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\cdots=f^{(2k)}(x_0)=0$，$f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$（$k=1,2,\cdots$），则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**拐点**．

例如，$f(x)=x^3$，在 $x_0=0$ 点，$f'(0)=f''(0)=0$，$f'''(0)=6\neq 0$，函数 $f(x)=x^3$ 在 $x_0=0$ 点取得拐点．

【定义 3】对于函数 $f(x)$，$x\in U^0(x_0)$，直线 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 是 $f(x)$ 过 x_0 的切线，若 $f(x)\geqslant y$ 则称 $f(x)$（$x\in U^0(x_0)$）为凹函数，或称 $f(x)$ 在 x_0 点是凹的；若 $f(x)\leqslant y$ 则称 $f(x)$（$x\in U^0(x_0)$）为凸函数，或称 $f(x)$ 在 x_0 点是凸的．

由定义 3 知，若切线在曲线之上，则曲线是凸的，若切线在曲线之下，则曲线是凹的．为了判断曲线的凹凸，观察 x_0 点附近一点 x_0+h，

$$\begin{aligned}y_{曲}-y_{切}&=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\\&=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)-f(x_0)-f'(x_0)h\\&=\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2).\end{aligned}$$

当 h 较小时，上式右端符号取决于 $f''(x_0)$，当 $f''(x_0)>0$ 时曲线是凸的，当 $f''(x_0)<0$ 时曲线是凹的．

5.2.3　平面曲线的描绘

联系解析几何中所讲述的描图方法及新学知识，可得出描图的大致步骤．

（1）确定函数的定义域；

（2）确定曲线的对称性、周期性；

（3）确定曲线与坐标轴的交点；

（4）找曲线中的特殊点（极大值点、极小值点、拐点、奇点），确定曲线的上升和下降区间、凸凹区间；

（5）确定曲线的渐近线．

对于具体问题，这些步骤可以变更，也可省略其中的一些步骤．

例 4　描绘 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的图形．

解　函数的定义域为 $x\neq -1$；

函数零点：$x=1$；

函数的奇点：$x=-1$；

函数的极值点：由于

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},$$

所以 $f'(1)=f'(-5)=0$，$f''(x)=\dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$，$f''(-5)<0$，故 $f(x)$ 在-5 取得极大值-13.5.

又 $f''(-1)=0$，$f'''(-1)=6>0$，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的拐点.

渐近线计算：

$$\begin{aligned} k&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b&=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5. \end{aligned}$$

所以有渐近线 $y=x-5$.

因此 $x=-1$ 是奇点，$f(x)$ 的分子比分母高一阶，所以有第二条渐近线 $x=-1$.

下表描述了曲线走势.

x	$(-\infty,-5)$	$(-5,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f(x)$	+	−	+	+
$f'(x)$	−	−	−	+
$f''(x)$	凸上升	凸下降	凸上升	凹上升

函数图像如图 5.5 所示.

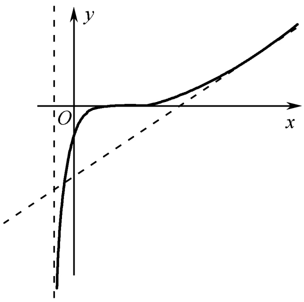

图 5-5

5.3 超越方程和高次方程数值算法

不少实际问题要归结成求方程

$$f(x)=0$$

的解．对于高次方程，法国数学家伽罗瓦早就证明了五次以上的一般方程得不到理论解；另外，对于一般超越方程也得不到理论解.

实际上大多数方程只能得到数值解，因此求上式的数值解更加具有实际意义，下面介绍三个解方程的算法．这些算法有的要用到导数，三个算法的收敛性都和导数有关.

5.3.1　牛顿法

牛顿法的思路是不断地用切线的根代替曲线的根，直至得到满意根．牛顿法也称切线法．

牛顿法的计算公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,\cdots,\quad |x_{n+1}-x_n|>\varepsilon>0\ .$$

牛顿法的求根过程是迭代过程，由 x_0 算 x_1，由 x_1 计算 x_2……由 x_n 计算 x_{n+1}，当 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\varepsilon$ 时计算结束，如果 $|x_{n+1}-x_n|$ 永远大于 ε，则表示算法有问题（不收敛）．那么在什么情况下能保证牛顿法收敛呢？

【定理 1】 对于方程 $f(x)=0$，$x\in(a,b)$，若满足

（1）$f(a)f(b)<0$；

（2）$f'(x)\neq 0$；

（3）$f''(x)$ 不变号；

（4）x_0 和 $f''(x)$ 同号．

证明　条件（1）保证在 (a,b) 内至少有一个根 x^* 使得 $f(x^*)=0$，由条件（3）知函数 $f(x)$ 单调，所以方程有唯一根，条件（2）保证公式不会产生溢出，由于 $f''(x)$ 不变号，故只能有四种可能，如图 5-6 所示

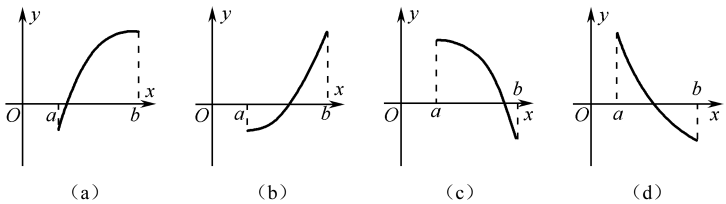

图 5-6

图 5-6（a）表明 $f(a)<0$，$f(b)>0$，$f'(x)>0$，$f''(x)<0$，取 $x_0=a$，现证明这种情况下牛顿法收敛．

按牛顿法公式有

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}>x_0$$

另一方面，将 $f(x)$ 在 x_0 处展开成一阶泰勒级数：

$$f(x^*)=f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2=0$$

由此有

$$x^*-\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)=x^*-x_1=-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_0)}(x^*-x_0)^2>0$$

所以有

$$x^* > x_1, \quad x^* > x_1 > x_0$$

同样可得 $x^* > x_2 > x_1 > x_0$，即 x^* 是数列 $\{x_n\}$ 的上限，且 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$，因而 $\{x_n\}$ 有极限. 对 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 两边取极限得

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

由此得

$$f(x^*) = 0 .$$

对其他三种情况，证明过程和结论与第一种情况相同，证明略.

【定理 2】 对于 $f(x)=0$，$x \in U(x^*;\delta)$，若 $f(x)$ 至少有二阶以上连续导数，且在 $U(x^*;\delta)$ 内只有一个根 x^*，则只要 δ 充分小，牛顿法收敛. 定理 2 也可描述成在根的邻域内，牛顿法收敛.

证明 令 $M_2 = \max|f''(x)|$，$M_1 = \min|f'(x)|$，任给 $\varepsilon > 0$，由前面已证得的

$$|x^* - x_1| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi)}{f'(x_0)}(x-x_0)^2\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{M_2}{M_1}\delta^2,$$

故只要 $\delta < \sqrt{\dfrac{2M_1\varepsilon}{M_2}}$，则 $|x^* - x_1| < \varepsilon$.

当然，实际操作时，不必使 $\delta < \sqrt{\dfrac{2M_1\varepsilon}{M_2}}$，因而迭代次数会多一些.

5.3.2 割线法

由于牛顿法解方程需要用到 $f'(x)$，而有些函数的 $f'(x)$ 求解不易，因此人们推导出了割线法，割线法分为单点割线法和双点割线法，单点割线法和双点割线法的计算原理都是不断用割线的根代替曲线的根直到得到满意根，其计算公式分别为

单点割线法：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} .$$

双点割线法：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} .$$

割线法的收敛条件和牛顿法类似.

这里需要说明一般教材和大多数学者认为定理 1 用处大，其实相反，定理 2 实际意义更大，原因是：

（1）按定理 1 只能求一个根，若 (a,b) 内有多个根，按定理 1 牛顿法公式无用；

（2）定理 1 中要求 $f''(x)$ 不变号，而判别 $f''(x)$ 是否不变号比用牛顿法求根更难，因此可操作性差.

表面上看求 $f(x)=0$ 的根，根在何处是不知道的，找根所在邻域和求根一样难，实际却不是这样.

对于区间 (a,b)，当 m 充分大后，$h=\dfrac{h-a}{m}$ 充分小，令 $x_i=a+h_i$（$i=0,1,\cdots,m-1$），则在区间 $[x_{i,}x_{i+1}]$ 内最多只有一个根或无根，若有根，则整个子区间都可认为是根的邻域，因而可用牛顿法和割线法求出根.

例 1　用牛顿法求 $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ 在区间 $[0,5]$ 内的所有根，设迭代精度 $\varepsilon=10^{-5}$.

解　取 $n=1000$，$\varepsilon=10^{-5}$，则 $h=0.005$，计算结果为

$$x_1=0.999989,\quad x_2=1.999997,\quad x_3=3.000003,\quad x_4=4.000011.$$

5.4* 泰勒级数的数值算法

泰勒级数是最强有力的数学工具之一．不少学科包括数学本身在很多地方要用到泰勒级数，但生成泰勒级数不易，原因是要涉及高阶导数计算，在数学分析里解决得最彻底的是微分学，理论上讲，至少所有任意元初等函数，只要高阶可导，就一定可遵循求导法则求出高阶导数或偏导数（下册介绍)．但由于对某些复杂函数计算其导数，尤其是高阶导数，算式相当长且相当复杂，实际计算总不是很容易，而且难以编写出通用程序．另外，不少函数没有解析算式，仅仅是由仪器、仪表所测量得到的一些离散数据，现在尚未见有通过这些离散的数计算出函数的高阶导数的有效算法．还须指出，对于 n 阶泰勒级数，所算出的 k 阶系数必须保证其精度为 $(\Delta h)^{n-k+1}$，这也是一难点.

5.4.1　代数插值多项式

【定义 1】对于定义在区间 I 上的连续函数 $y=f(x)$，若多项式 $P_n(x)$ 满足 $P_n(x_i)=f(x_i)=y_i$（$i=0,1,\cdots,n$），则 $P_n(x)$ 称为关于函数 $f(x)$ 的 n 阶代数插值多项式.

【引理 1】对于定义在区间 I 上的连续函数 $y=f(x)$，

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$$

是 n 阶代数插值多项式.

显然 $L_n(x_i)=y_i$（$i=0,1,\cdots,n$），通常称 $L_n(x)$ 为拉格朗日插值多项式.

【引理 2】对于定义在区间 $I=[a,b]$ 上的连续函数 $y=f(x)$，设 $y_i=f(x_i)$（$i=0,1,\cdots,n$），且 $x_i=a_i+ih$， $h=\dfrac{b-a}{n}$，若 $Z_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i(x-x_0)^i$ 满足

$$\begin{cases} a_0=y_0 \\ \begin{cases} a_i=\sum\limits_{j=1}^{n-i+1}(-1)^{j+1}C_{n-i+1}^{j}y_j^{(i)} & i=1,2,\cdots,n \\ y_j^{(i)}=\dfrac{y_j^{(i-1)}-a_{i-1}}{jh} & j=1,2,\cdots,n-i+1 \end{cases} \end{cases} \tag{4-1}$$

则 $Z_n(x)$ 是 n 阶幂级数型代数插值多项式.

证明 若 $Z_n(x)$ 是代数插值多项式，由定义有

$$\begin{cases} a_0=y_0 \\ a_0+a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n=y_1 \\ a_0+a_1\cdot 2h+a_2\cdot(2h)^2+\cdots+a_n\cdot(2h)^n=y_2 \\ \cdots \\ a_0+a_1\cdot nh+a_2\cdot(nh)^2+\cdots+a_n\cdot(nh)^n=y_n \end{cases} \tag{4-2}$$

化简两式得

$$\begin{cases} a_1+a_2h+\cdots+a_nh^n={(y_1-a_0)}/{h}=y_1^{(1)} \\ a_1+a_2\cdot 2h+\cdots+a_n\cdot(2h)^n={(y_2-a_0)}/{(2h)}=y_2^{(1)} \\ \cdots \\ a_1+a_2\cdot nh+\cdots+a_n\cdot(nh)^n={(y_n-a_0)}/{(2h)}=y_n^{(1)} \\ y_j^{(1)}={(y_j-a_0)}/{jh},\quad j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{4-3}$$

过 ih（$i=1,2,\cdots,n$）作 $n-1$ 阶拉格朗日插值多项式

$$\begin{aligned} L_{n-1}(x)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i^{(1)} \\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-h)\cdots(x-(i-1)h)(x-(i+1)h)\cdots(x-nh)}{(ih-h)\cdots(ih-(i-1)h)(ih-(i+1)h)\cdots(ih-nh)}y_i^{(1)} \end{aligned} \tag{4-4}$$

由此得

$$a_1=\sum_{j=1}^{n-i+1}(-1)^{j+1}C_n^jy_j^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}C_n^jy_j^{(1)}$$

类推有

$$\begin{cases} a_i = \sum_{j=1}^{n-i+1} (-1)^{j+1} C_{n-i+1}^{j} y_j^{(i)} \\ y_j^{(i)} = \dfrac{y_j^{(i-1)} - a_{i-1}}{jh} \end{cases}$$

证毕.

【引理 3】对于函数 $y = f(x)$，$x \in [\alpha, \beta]$，$x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$x_{2i} = x_0 - \sqrt{ih}$，$x_{2i-1} = x_0 + \sqrt{ih}$，$\sqrt{mh} = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$，$h = \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{4m}$，$i = 1,2,\cdots,m = \dfrac{n}{2}$，若幂级数 $Z_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i$ 满足

$$\begin{cases} a_0 = y_0 \\ a_{2i-1} = \sum_{j=1}^{m-i+1} (-1)^{j+1} C_{m-i+1}^{j} \mu_j^{(i)} \\ \mu_j^{(1)} = (\mu_j^{(i-1)} - a_{2i-3}) \big/ (2jh)^{1/2} & i = 1,2,\cdots,m \\ \mu_j^{(0)} = (y_{2j-1} - y_{2j}) \big/ (jh) \\ a_{2i} = \sum_{j=1}^{m-i+1} (-1)^{j+1} C_{m-i}^{j} \nu_j^{(i)} & j = 1,2,\cdots,m-i+1 \\ \nu_j^{(1)} = (\nu_j^{(i-1)} - a_{2i-2}) \big/ (jh) \\ \nu_j^{(0)} = (y_{2j-1} + y_{2j} - 2a_0) \big/ (2jh) \end{cases} \tag{4-5}$$

则 $Z_n(x)$ 是 n 阶代数插值多项式.

证明　由插值多项式的定义有

$$\begin{cases} a_0 = y_0 \\ \sum_{i=0}^{n} a_i (x_i - x_0)^i = y_i \end{cases} \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

把 a_0 代入式(4-5)并分别将两邻奇偶序方程相减和相加，整理得

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{2i-1} (x_j - x_0)^i = \mu_j^{(1)} \\ \mu_j^{(1)} = (y_{2i-1} - y_{2i}) \big/ (2\sqrt{jh}) \end{cases} \qquad j = 1,2,\cdots,m$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_{2i} (x_j - x_0)^i = \nu_j^{(1)} \\ \nu_j^{(1)} = (y_{2i-1} + y_{2i} - 2a_0) \big/ (2jh) \end{cases} \qquad j = 1,2,\cdots,m$$

按引理 2 的证明方法立即可得到式（4-5）．证毕．

【引理 4】 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}C_n^{i+1}i^k=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k=1,2,\cdots,n-1\end{cases}$.

证明 （1）证明$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}C_n^{i+1}i^0=1$.

因为$0=(1-1)^n=1-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i$，所以$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}C_n^{i+1}i^0=1$.

（2）用数学归纳法证明$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i i=0$.

当$n=2$时，$\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}C_2^i i=1\times C_2^1-2\times C_2^2=0$，现假设$n=p$时引理成立，当$n=p+1$时

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}C_{p+1}^i i&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}i(C_p^i+C_p^{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}iC_p^i+\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}iC_p^{i-1}\\&=1-\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}(i+1)C_p^i\\&=1-\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}iC_p^i-\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i\\&=1-\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i=0.\end{aligned}$$

（3）再用数学归纳法证明$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C_{k+1}^i i^k=0$.

当 $k=1$ 时，前面已经证明 $\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}C_2^i i=0$，现假设 $k=p-1$ 时引理成立，即 $\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i i^{p-1}=0$，当$k=p$时

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}C_{p+1}^i i^p&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}(C_p^i+C_p^{i-1})i^p\\&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}C_p^i i^p+\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}C_p^{i-1}i^p\\&=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i i^p+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^{i-1}i^p\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i i^p+\sum_{i=0}^{p}(-1)^i C_p^i(i+1)^p$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i i^p+1-\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i(i^p+pi^{p-1}+\cdots+1)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i i^p-\sum_{i=1}^{p}C_p^i i^p=0.$$

（4）最后用数学归纳法证明对于任意n有$\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i i^k=0$（$k=1,2,\cdots,n-1$）.

前面已经证明了$n=k+1$时$\sum\limits_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}C_{k+1}^i i^k=0$，现假设$n=p$时$\sum\limits_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i i^k=0$，当$n=p+1$时

$$\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}C_{p+1}^i i^k=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}(C_p^i+C_p^{i-1})i^k$$

$$=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}C_p^i i^k+\sum_{i=1}^{p+1}C_p^{i-1}i^k$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i i^k+\sum_{i=1}^{p}(-1)^i C_p^i(i+1)^k$$

$$=1-\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i(i^k+ki^{k-1}+\cdots+1)$$

$$=1-\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}C_p^i=0.$$

证毕.

5.4.2　泰勒级数的数值算法

【定理 1】若$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$，当忽略

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

时，式（4-1）中

$$\begin{cases}a_i=\dfrac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)\\ y_j^{(i)}=\sum\limits_{k=i}^{n}f^{(k)}(x_0)(jh)^{k-i}\end{cases}.$$

证明　当$i=1$时

$$y_j^{(1)}=(y_j-a_0)\Big/(jh)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)(x_j-x_0)^i}{k!}-f(x_0)}{jh}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(jh)^{k-1}}{k!}.$$

$$\begin{aligned}a_1&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i y_j^{(1)}\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(jh)^{k-1}}{k!}\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i i^{k-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)h^{k-1}}{k!}\\&=\frac{1}{1!}f'(x_0).\end{aligned}$$

现假设 $i=p$ 时定理成立，即

$$y_j^{(p)}=\sum_{k=p}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(jh)^{k-p}}{k!},\quad a_p=\frac{1}{p!}f^{(p)}(x_0).$$

当 $i=p+1$ 时

$$\begin{aligned}y_j^{(p+1)}&=\frac{y_j^{(p)}-a_p}{jh}\\&=\frac{\sum\limits_{k=p}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(jh)^{k-p}}{k!}-a_p}{jh}\\&=\frac{\sum\limits_{k=p}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(jh)^{k-p}}{k!}-\frac{1}{p!}f^{(p)}(x_0)}{jh}\\&=\sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(jh)^{k-p-1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{p+1}&=\sum_{j=1}^{n-p}(-1)^{j+1}C_{n-p}^j y_j^{(p+1)}\\&=\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\\&=\frac{f^{(p+1)}(x_0)}{(p+1)!}.\end{aligned}$$

证毕.

【定理 2】对于函数 $y=f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$，$x\in[a,b]$，

若忽略

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

则式（4-4）满足

$$a_i=\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}.$$

这一定理的证明方法和证明过程与定理 1 相同，证明略.

这里须说明，定理 1 和定理 2 中所说的是 $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 忽略不计，而不是 $(x-x_0)^{n+1}$ 忽略不计，其原因要在下册介绍了泰勒级数收敛半径后才清楚，附带提及，虽然 $|\Delta x|=|x-x_0|$ 愈小，即使 $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 会愈小，也只是说截断误差会愈小，但是实际计算时尚要考虑算法的稳定性，也就是说要考虑因舍入误差所引起的计算误差. 式（4-1）和式（4-4）在计算 $y_j^{(i)},\mu_j^{(i)},\nu_j^{(i)}$ 时要不断除以 h，当 h 很小时，误差将会大大放大，算法的稳定性并不是很好，显然式（4-4）的稳定性比式（4-1）的好.

例 1　将函数 $y=\frac{1}{1+4x^2}$，$x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$展开成 40 阶泰勒级数.

解　取 $\sqrt{20h}<0.5$，可取 $h=0.0124<0.0125$，用式（4-4）计算其泰勒级数系数，计算结果见表 5-1.

表 5-1　$\frac{1}{1+4x^2}$ 的泰勒级数的前 41 个系数

i	$A(i)$	i	$A(i)$	i	$A(i)$
0	1.0000000	2	−4.0000000	4	16.0000000
1	0.0000000	3	0.0000000	5	0.0000000
6	−63.9999956	18	−257822.359800	30	−180388318.900
7	0.0000000	19	0.000000	31	0.000
8	255.9996823	20	994657.113850	32	275987445.130
9	0.0000000	21	0.000000	33	0.000
10	−1023.9845740	22	−3650448.383000	34	−309341768.300
11	0.0000000	23	0.000000	35	0.000
12	4095.4645095	24	12287220.224000	36	258290043.580
13	0.0000000	25	0.000000	37	0.000
14	−16370.125080	26	−36347025.270000	38	−148178592.000
15	0.000000	27	0.000000	39	0.000
16	65259.643458	28	90359295.638	40	60733964.630
17	0.000000	29	0.000		

结果分析：函数 $y=\dfrac{1}{1+4x^2}$ 展开成 40 阶泰勒级数的各系数的理论值为 $1, 0, -4, 0, 16, \cdots$，即该泰勒级数第 i 个系数的理论值为

$$t_i=\begin{cases}0 & i\text{为奇数}\\ 2^i & i\text{能被4整除}\\ -2^i & i\text{除以4的余数2}\end{cases}.$$

这类数值计算算例用手算难度很大，且太耗费时间，宜于编写程序用计算机计算.

按书中算法所算出的前 20 阶导数都和理论值相当接近，而后面的值之所以和理论值相差甚远，其原因是算法稳定性不好.

思　考　题

1．求函数极限时，什么情况下必须使用洛必达法则？什么情况下宜用洛必达法则？什么情况下不能用洛必达法则？
2．宜直接利用泰勒公式所求极限的类型和前提是什么？
3．是否 $f'(x_0)=0$，函数 $f(x)$ 在 x_0 就取得了极值？
4．能否熟练写出五个基本初等函数的泰勒级数.

习　　题

计算下列极限：

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}$

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

3．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

4．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$

5．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$

6．$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin 4x}$

7．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\sin 7x}$

8．$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

9．$\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{1/x}-1)$

10．$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

11．$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

12．$\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

13．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{m}\right)^{m}$

14．$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2x-\pi}$

15．$\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$

16．$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{k}{x}$

17．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

18．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

19．$\lim\limits_{x\to}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$

20．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

21．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cot x}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

22．$\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln(1-x)+\tan\dfrac{\pi}{2}x\right)$

23．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2+\dfrac{4}{3}x^3-x^4}{6\sin x-6x+x^3}$

24．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

25．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)$

26．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

27．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

28．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

求下列函数的极值：

29．$y=2x^3-3x^2$

30．$y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$

31．$y=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$

32．$y=x-\ln(1+x)$

33．$y=x^2e^{-x^2}$

34．$y=2e^x+e^{-x}$

35．$y=\cos x+\sin x$

36．$y=x^{\frac{1}{x}}$

37．$y=x-\sin x$

38．$y=x^2(x-1)^3$

39．$y=(x-3)^4$

40．$y=x+\tan x$

求下列函数在指定区间上的最大值和最小值：

41．$y=x^4-2x^2+5$，$[-2,2]$

42．$y=x^3-3x^2+6x-2$，$[-1,1]$

43．$y=\sqrt{100-x^2}$，$[-6,8]$

44．$y=\sin 2x-x$，$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

45．$y=\dfrac{x-1}{x+1}$，$[0,4]$

46．$y=x^x$，$\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right]$

47．有一个面积为 8×5 的纸板，将 4 个角各剪去一个小正方形，折叠成一个无盖纸盒，问所剪去的小正方形边长是多大时，纸盒容积最大？

48．三个点 A，B，C 不在一条直线上，$\angle ABC=60^\circ$，汽车以时速 100 km 由 A 向 B 运行，同时，火车以时速 120 km 由 B 向 C 前进，设 AB 长为 400 km，问火车开出多长时间后其与汽车距离最短？

49．某工厂制造无盖金属圆柱桶，现定容积为 4.71 m^3，用来作底的金属价格为 3 元/m^2，作侧面的金属价格为 2 元/m^2，问如何选择材料，使成本最低？

50．从南到北的铁路干线经过甲、乙两城，甲、乙两城相距 150 km，某工厂在乙城东 10 km 处，而原料在 A 城，已知铁路运输每千米每吨 2 元，公路运输每千米每吨 5 元，如何选择公路始点 B，使

运费最省？

51．试证对于确定容积的圆锥形幕帐，当高等于底面直径时，材料最省.

求下列函数凹凸区间和拐点：

52． $y=x^5$　　53． $y=1-x^2$　　54． $y=e^{\arctan x}$

55． $y=x^3-3x^2-9x+9$　　56． $y=a-\sqrt[5]{(x-6)^2}$　　57． $y=x^4(12\ln x-7)$

58．证明 $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 有三个拐点位于同一直线.

59．问 a , b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

60．求下列曲线的渐近线：

（1） $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$　　（2） $y=xe^{2/x}+1$

（3） $y=\ln x$　　（4） $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$

61．描绘下列各曲线图形：

（1） $y=\dfrac{8a^3}{x^2+a^2}$　　（2） $y=x-\dfrac{1}{x}$

（3） $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$　　（4） $y=e^{-x\sin x}$

62．求下列各曲线的曲率：

（1）双曲线 $xy=4$ 在点 $(-2,2)$ 处；

（2） $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处；

（3） $y=x^3$ 在点 (x,y) 处；

（4） $y=a\cos^3 t$ ， $y=a\sin^3 t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处；

第 6 章　不 定 积 分

从本章开始进入积分学，积分应用范围比微分应用范围更广泛．

积分和微分是两种互逆运算，不定积分中所有算法和计算公式都从相应的微分算法和公式导出．

6.1　不定积分的引入及其基本性质

6.1.1　不定积分引入

积分运算是微分运算的逆运算，积分运算可通过微分运算引入．这里的积分是指不定积分．

例如一物体作匀加速运动，初速度为 v_0， $t=0$ 时初始位置为 S_0，求物体路程 S 和时间 t 的关系．

由加速度的定义有

$$a=a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=v'(t) \tag{1-1}$$

当

$$v(t)=at+v_0 \tag{1-2}$$

时，式（1-1）成立．

由速度的定义有

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=S'(t) \tag{1-3}$$

当

$$S(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+S_0 \tag{1-4}$$

时，式（1-1）和式（1-3）成立．

式（1-2）和式（1-4）是怎样算出的呢？

现在我们给出积分（运算）和相应术语的定义．

【**定义**】设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的一个函数．如果存在一个函数 $F(x)$ 使得在 I 上都有

$$F'(x)=f(x)\quad 或\quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x，$$

则称 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在 I 上的一个**原函数**．

从原函数的定义可以看出，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数，则对于任意常数 C， $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，因为

$$(F(x)+C)' = F'(x)+C' = F'(x) = f(x) .$$

同样，如果 $G(x)$ 也是 $f(x)$ 的原函数，那么 $G(x)$ 和 $F(x)$ 之差为一个常数，即 $G(x)=F(x)+C$.

事实上，令

$$H(x) = G(x) - F(x)$$

则有

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的所有原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，有时也简称为积分，并记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，称“ $\int$ ”为积分符号， $f(x)$ 为被积函数， $f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式.

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

其中 C 为任意常数，我们称 C 为积分常数.

对于前面的例子，按上面的定义有

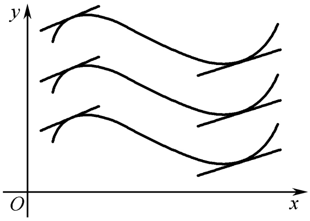

图 6-1　原函数几何性质图

$$v(t) = \int a\mathrm{d}t = at + C \text{，其中 } C = v_0$$

同样，按定义有

$$S(t) = \int v(t)dt = \int (at + v_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + S_0$$

由于 $F'(x)$ 为曲线 $y = F(x)$ 上过点(x，$F(x)$)的切线的斜率，对于同一被积函数的所有原函数在同一 x 的导数都相等，由此可知各原函数的图形都是一些平行的曲线，如图 6-1 所示.

6.1.2　不定积分基本性质

从不定积分的定义可直接得到不定积分的基本性质.

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$， $\int \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$；
2. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$；
3. $\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x \ (a \neq 0)$.

例 1　计算 $\int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x$.

解　由于 $(-\cos x)' = \sin x$， $(\sin x)' = \cos x$，所以

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C_1,\quad \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x = C_2$$

于是

上式 $=\int \sin x\mathrm{d}x+\int \cos x\mathrm{d}x=(-\cos x+C_1)+(\sin x+C_2)=-\cos x+\sin x+C$.

例 2　计算 $\int a^{x+b}\mathrm{d}x$.

解　由于 $\left(\dfrac{a^b}{\ln a}a^x\right)'=a^b a^x$，所以

上式 $=\int a^b a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^b}{\ln a}a^x+C$

我们通过不定积分的定义和它的基本性质已经找到了一些函数的原函数，但是还有一个最重要也是最基本的问题未解决，那就是什么样的 $f(x)$ 有原函数.

【定理 1】若函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上有原函数 $F(x)$，对区间 I 上的任意 x 有

$$F'(x)=f(x)$$

也就是说连续函数一定有原函数.

这一定理现在不予证明.

6.2　基本积分表

根据不定积分的定义，以及积分是微分的逆运算，我们可以直接从导数表得到不定积分表.

1．$(C)'=0\Rightarrow \int 0\mathrm{d}x=C$.

2．$(x)'=1\Rightarrow \int 1\mathrm{d}x=x+C$.

3．$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}\Rightarrow \int x^\alpha\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ ($\alpha\neq -1$，$x>0$).

4．$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}\Rightarrow \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

5．$(\sin x)'=\cos x\Rightarrow \int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

6．$(\cos x)'=-\sin x\Rightarrow \int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

7．$(\sinh x)'=\cosh x\Rightarrow \int \cosh x\mathrm{d}x=\sinh x+C$.

8．$(\cosh x)'=\sinh x\Rightarrow \int \sinh x\mathrm{d}x=\cosh x+C$.

9．$(\tan x)'=\sec^2 x\Rightarrow \int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$.

10．$(\cot x)'=-\csc^2 x\Rightarrow \int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$.

11．$(a^x)'=a^x\ln a\Rightarrow \int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$（$a>0$，$a\neq 1$）；当 $a=\mathrm{e}$ 时，$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$.

12．$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.

13．$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$.

14．$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\arccos x + C$.

15．$(x^x)' = x^x(\ln x+1) \Rightarrow \displaystyle\int x^x(\ln x+1)\mathrm{d}x = x^x + C$.

16．$(x^{a^x})' = a^x x^{a^x}\left(\ln a \ln x + \dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \displaystyle\int a^x x^{a^x}\left(\ln a \ln x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x^{a^x} + C$.

说明：$\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 的积分区间不能含 0 点，其他积分的积分区间内被积函数也应有意义．

不定积分中被积函数和原函数中有时会涉及双曲函数，这里对双曲函数做一些介绍．按定义

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

同样，可定义双曲余切、双曲正割、双曲余割函数．双曲正弦函数和双曲余弦函数之间的关系与正弦函数和余弦函数之间的关系类似：

$$\sinh^2 x + \cosh^2 x = \cosh 2x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

下面介绍双曲正弦、双曲余弦函数的反函数．令

$$y = \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

则

$$\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}, \quad x = \sinh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

同样可得双曲余弦函数的反函数为

$$x = \cosh^{-1} y = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1}), \quad y > 1$$

计算时可只取 $x = \cosh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

显然

$$(\sinh x)' = \cosh x \Leftrightarrow \int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \Leftrightarrow \int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \sinh^{-1} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

同样可得

$$y=\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$$(\cosh^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}=\cosh^{-1}x+C=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$$

6.3　第一换元法 I

理论上讲，所有连续函数的原函数都是存在的，但是能通过不定积分找到原函数的连续函数不多．即使找得到原函数，绝大多数原函数也不是利用不定积分的基本性质和不定积分的基本积分表得出的，必须利用必要的算法和技巧．

换元法是不定积分常用算法之一，换元法分为第一换元法和第二换元法．第一换元法的积分途径是将被积函数的一部分作为中间变量，利用复合函数的微分法则，通过凑微分简化被积函数，将被积函数转换成容易积分的函数．第一换元法中凑微分是不可少的，所以第一换元法又称为凑微分法．

第一换元法的宗旨是通过凑微分，使被积函数变成

（1）可由基本积分表查出原函数或可通过不定积分基本性质找到原函数；

（2）转换成有理函数；

（3）转换成可用分部积分法（后面会介绍）积分的函数．

这一节中，我们将介绍哪些函数可通过第一换元法转换成可由基本积分表和基本性质找出原函数及怎样得到原函数．

6.3.1　坐标变换法

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x\xlongequal[a\neq 0]{y=ax+b}\int f(y)\frac{1}{a}\mathrm{d}y=\frac{1}{a}F(y)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \tag{3-1}$$

由于上面的变换（换元）就是代数中的坐标变换，故称上述方法为坐标变换法．

例 1　计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\ (a\neq 0)$.

解　令 $y=\frac{x}{a}$，$\mathrm{d}x=a\mathrm{d}y$，则

上式 $=\int\frac{a\mathrm{d}y}{a^2(1+y^2)}=\frac{1}{a}\arctan y+C=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

例 2　计算 $\int\cos(2x+\pi/3)\mathrm{d}x$.

解　上式 $=\int\frac{1}{2}\cos(2x+\pi/3)\mathrm{d}(2x+\pi/3)$

$$=\frac{1}{2}\sin(2x+\pi/3)+C$$

由于坐标变换时，x 和 y 关系简单，故这类变换常略去变换过程.

6.3.2 幂函数变换法

若 $F'(x)=f(x)$，即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则当 $\mu\neq 0$ 时，

$$\int f(x^{\mu})x^{\mu-1}\mathrm{d}x \xlongequal{y=x^{\mu}} \int\frac{1}{\mu}f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\mu}F(y)+C=\frac{1}{\mu}F(x^{\mu})+C \qquad (3\text{-}2)$$

例 3 计算 $\int x^{\mu-1}\mathrm{e}^{x^{\mu}}\mathrm{d}x$.

解 $\int x^{\mu-1}\mathrm{e}^{x^{\mu}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{x^{\mu}}\mathrm{d}x^{\mu}=\frac{\mathrm{e}^{x^{\mu}}}{\mu}+C$.

由于上面的变换 $y=x^{\mu}$ 是幂函数变换，故称算法为幂函数变换法.

6.3.3 一般凑微分法

对于 $\int f(u(x))g(x)\mathrm{d}x$，若 $u'(x)=ag(x)$，$a\neq 0$ 且 $F'(x)=f(x)$，则

$$\begin{aligned}\int f(u(x))g(x)\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{a}f(u(x))\mathrm{d}(u(x))\\&=\int\frac{1}{a}f(y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a}F(y)+C\\&=\frac{1}{a}F(u(x))+C\end{aligned} \qquad (3\text{-}3)$$

式（3-3）中将 $g(x)\mathrm{d}x$ 凑成 $\frac{1}{a}\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\mathrm{d}u(x)$，实际上式（3-1）和式（3-2）同样是凑微分，只不过是特殊的凑微分而已.

例 4 计算 $\int\left(\cos(2x+\pi/3)-1.5\sin(3x+\pi/4)\right)\mathrm{e}^{\sin(2x+\pi/3)+\cos(3x+\pi/4)}\mathrm{d}x$.

解 令 $y=u(x)=\sin(2x+\pi/3)+\cos(3x+\pi/4)$，则 $\mathrm{d}y=2\cos(2x+\pi/3)-3\sin(3x+\pi/4)\mathrm{d}x$.

原式 $=\int\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y}+C$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\sin(2x+\pi/3)+\cos(3x+\pi/4)}+C$$

式（3-3）中 $u(x)$ 也可以是复合函数，此时 $g(x)$ 须是两个函数的乘积，若

$$\int f(u(v(x)))g_1(x)g_2(x)\mathrm{d}x$$

满足

$$(u(v(x)))' = u'(v(x))v'(x) = ag_1(x)g_2(x)\text{，}\quad a \neq 0\text{，}\quad \text{且} F'(x) = f(x)\text{，}$$

则

$$\begin{aligned}\int f(u(v(x)))g_1(x)g_2(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a} f(u(v(x)))\mathrm{d}u(v(x)) \\ &= \frac{1}{a}F(u(v(x))) + C\end{aligned}$$

例 5　计算 $\int \cot x \sin\left(\ln(\sin x)\right)\mathrm{d}x$.

解　令 $u(v(x)) = \ln(\sin x)$，$g_1(x)g_2(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$，$\mathrm{d}u(v(x)) = \dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \cot x\mathrm{d}x$，则

原式 $= \int \sin(\ln(\sin x))\mathrm{d}\ln(\sin x) = -\cos(\ln(\sin x)) + C$

显然，复合重数还可更多，只要满足类似关系，就可按上面的算法找到原函数.

以上积分关键之一是要记住积分表，还要记牢基本函数的导数计算方法.

例 6　计算 $\int x^x(\ln x + 1)\sin x^x\mathrm{d}x$.

解　本例 $f(u(x)) = \sin x^x$，$\dfrac{\mathrm{d}x^x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{x\ln x}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$，令 $y = x^x$，则

$$\begin{aligned}\int x^x(\ln x + 1)\sin x^x\mathrm{d}x &= \int \sin y\mathrm{d}y \\ &= -\cos y + C \\ &= -\cos x^x + C\end{aligned}$$

以上诸例均使用第一换元法将被积函数转换成基本积分表中的基本（被积）函数，然后直接利用表找出原函数.

6.3.4　函数幂变换法

若被积函数 $f(x) = u^\mu(x)v(x)$，而 $\mathrm{d}u(x) = av(x)\mathrm{d}x$，$\mu$ 为任意实数，$\mu \neq 1$，$a \neq 0$，则

$$\begin{aligned}\int u^\mu(x)v(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{a}u^\mu(x)\mathrm{d}u(x) \\ &= \frac{1}{a(\mu+1)}u^{\mu+1}(x) + C\end{aligned} \tag{3-4}$$

当 $\mu = -1$ 时，有

$$\int \frac{v(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|u(x)| + C \tag{3-5}$$

例 7　计算 $\int \dfrac{\arctan^2 x}{1 + x^2}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\mathrm{d}\arctan x=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，所以

$$\int\frac{\arctan^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan^2 x\mathrm{d}\arctan x$$
$$=\frac{1}{3}\arctan^3 x+C.$$

式（3-4）和式（3-5）中的 $u(x)$ 的原函数可能是找不到的.

例 8 计算 $\int\mathrm{e}^{-x^2}\cdot 2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)$，所以

$$\int\mathrm{e}^{-x^2}\cdot 2x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x^2}+C.$$

上述类型的原函数是函数幂，故称变换法为函数幂变换法，这类积分是凑微分法的特例，故书中将其单独介绍.

6.4 有理函数积分法

第一换元法的宗旨之一是将被积函数转换成有理函数，在基本积分表中只有两个最简单的有理函数 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{1}{x^2+1}$ 有原函数，这一节介绍一般有理函数的积分法.

6.4.1 简单有理函数

简单有理函数是指：

1. $f(x)=\dfrac{c}{ax+b}$；

2. $f(x)=\dfrac{mx+n}{x^2+px+q}$；

3. $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+px+q)^k}$，

式中 a,b,c,m,n,p,q 为实数，k 为正整数．上面三类函数，对于第一类，前面已经做了介绍不再重述.

例 1 计算 $\int\dfrac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$.

解 将分母作以下处理：

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$

令 $t=x+\dfrac{p}{2}$， $b=n-\dfrac{1}{2}mp$， $\pm a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$，则

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int\frac{m\left(x+\frac{p}{2}\right)+n-\frac{1}{2}mp}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{mt+b}{t^2\pm a^2}\mathrm{d}t=m\int\frac{t}{t^2\pm a^2}\mathrm{d}t+b\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}.$$

而

$$m\int\frac{t}{t^2\pm a^2}\mathrm{d}t=\frac{m}{2}\ln\left|t^2\pm a^2\right|+C=\frac{m}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+C.$$

（1）当 $p^2>4q$ 时，取 $-a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$，有

$$b\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-a^2}=\frac{b}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C.$$

（2）当 $p^2<4q$ 时，取 $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$，有

$$b\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}=\frac{b}{a}\arctan\frac{t}{a}+C.$$

综上，当 $p^2>4q$ 时，有

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2n-mp}{2\sqrt{p^2-4q}}\ln\left|\frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}}\right|+C;$$

当 $p^2<4q$ 时，有

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\frac{m}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

例 2　求积分 $I_n=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$， $q-\dfrac{p^2}{4}>0$.

解　令 $t=x+\dfrac{p}{2}$， $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$，则

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{n+1}}$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int\frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2\int\frac{1}{(t^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}t\,.$$

由此有

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}I_n\,,\quad n=1,2,\cdots.$$

而

$$I_1=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C=\frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-p^2/4}}+C\,;$$

$$I_2=\frac{1}{2a^2}\frac{t}{t^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a}+C$$

$$=\frac{1}{2(q-p^2/4)}\frac{x+\frac{p}{2}}{x^2+px+q}+\frac{1}{2(q-p^2/4)^{3/2}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-p^2/4}}+C.$$

6.4.2 一般有理函数的积分

除了前面介绍的有理函数及能用换元法转换成的简单有理函数的积分其原函数可通过前面介绍的方法找到外，对于一般有理函数可用分项积分法求解，能分项就能求解．这里介绍一般有理函数的积分方法.

设 $f(x)=\dfrac{q_m(x)}{p_n(x)}$， $p_n(x)$ 是 n 次多项式， $q_m(x)$ 是 m 次多项式，且 $n>m$， $p_n(x)$ 的最高次项系数为 1，若 $p_n(x)$ 为一次因式与二次不可约因式的乘积，即能分解成 $(x-a_i)^{\lambda_i}$ 和 $(x^2+p_jx+q_j)^{\mu_j}$ （$i=1,2,\cdots,s$; $j=1,2,\cdots,l$ ）的乘积，且

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i+2\sum_{j=1}^{l}\mu_j=n\,,\quad p_j^2-4q_j<0(j=1,2,\cdots,l)\,,$$

则由代数知识可知，有理函数 $\dfrac{q_m(x)}{p_n(x)}$ 可分解成若干 $\dfrac{A_i}{(x-a_i)^{\lambda_i}}$ 与若干 $\dfrac{A_jx+B_j}{(x^2+p_jx+q_j)^{\mu_j}}$ 之和，由分项积分法即可求出有理函数 $f(x)=\dfrac{q_m(x)}{p_n(x)}$ 的原函数.

因式分解等价于解高次方程，现在尚无解高次方程的通用算法，故要求 $p_n(x)$ 中 $n\leqslant 4$，且已作好因式分解.

例 3　求积分 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x-1)}$.

解　设 $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}$，先将右端通分，然后比较等式两端分子同幂次的系数得方程组

$$\begin{cases}A+C=0\\-A+B=1\\-B+C=0\end{cases}$$

解之得 $A=-\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{2}$．于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x-1)}&=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}\\&=-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

例 4　求积分 $\int\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x=\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$.

解　设 $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$，比较分子分母系数有

$$\begin{cases}A+D=1\\-3A+C-2D=0\\A+B-C+D=0\\-A=1\end{cases}$$

解之得 $A=-1$，$B=2$，$C=1$，$D=2$．故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+2\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}\\&=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C=-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{x}\right|+C\end{aligned}$$

6.5　第一换元法 II

对于某些被积函数，通过第一换元法不能直接找到原函数，但能将被积函数转换成有理函数，然后再积分.

6.5.1　$R(\sin x,\cos x)$ 型被积函数的积分

若被积函数只含 $\sin x$ 和 $\cos x$，或者可通过三角函数的关系转换成只含 $\sin x$ 和 $\cos x$，则

可通过第一换元法使被积函数变成有理函数，这时可对有理函数积分.

对于这类积分，可由函数的特性选择算法.

1. 正弦变换、余弦变换法

正弦变换是指用$t=\sin x$的变换，余弦变换是指用$t=\cos x$的变换.

若$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可用余弦变换，此时

$$t=\cos x,\quad \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}$$

若$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，则可用正弦变换，此时

$$t=\sin x,\quad \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\cos x}$$

例 1 计算$\int\frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{\sin x\sin 2x}\mathrm{d}x$.

解 $R(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{\sin x\sin 2x}=\frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{2\sin^2 x\cos x}=-\frac{\sin^2 x+(-\cos x)^4}{2\sin^2 x(-\cos x)}$，可用正弦变换.

令$t=\sin x$，$\mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\cos x}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{\sin x\sin 2x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\sin^2 x+\cos^4 x}{2\sin^2 x\cos x}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{t^2+(1-t^2)^2}{2t^2(1-t^2)}\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{1}{2(1-t^2)}+\frac{1-t^2}{2t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}t+C\\&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|-\frac{1}{2\sin x}-\frac{\sin x}{2}+C\end{aligned}$$

例 2 计算$\int\tan^3(2x+5)\mathrm{d}x$.

解 $\tan^3(2x+5)=\frac{\sin^3(2x+5)}{\cos^3(2x+5)}$.

因为$R(-\sin(2x+5))=-R(\sin(2x+5))$，$R(-\cos(2x+5))=-R(\cos(2x+5))$，所以本例既可用正弦变换，又可用余弦变换，考虑到分母是余弦函数，所以用余弦变换.

令$t=\cos(2x+5)$，$\mathrm{d}t=-2\sin(2x+5)\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{2\sin(2x+5)}$.

$$
\begin{aligned}
\int \tan^3(2x+5)\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^3(2x+5)}{\cos^3(2x+5)}\mathrm{d}x \\
&= \int -\frac{\sin^2(2x+5)}{2\cos^3(2x+5)}\mathrm{d}\cos(2x+5) \\
&= -\int \frac{1-t^2}{2t^3}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4t^2}+\frac{1}{2}\ln|t|+C \\
&= \frac{1}{4\cos^2(2x+5)}+\frac{1}{2}\ln|\cos(2x+5)|+C.
\end{aligned}
$$

这类积分在积分前须将非正弦函数、非余弦函数先转换成正弦函数或余弦函数，把不同类的正弦或余弦函数转换成同类的正弦或余弦函数．下面介绍的正切变换、万能变换也要作这种转换，对于双曲正弦、余弦变换同样要做类似工作．

2．正切变换法

若 $R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)$，则宜作正切变换．

令 $t=\tan x$，则

$$
\begin{cases}
x=\arctan t \\
\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
\sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\
\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}
\end{cases}
$$

例 3　计算 $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x}\mathrm{d}x$.

解　$R(\sin x,\cos x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\sin x\cos x}=R(-\sin x,-\cos x)$，所以宜用正切变换.

令 $t=\tan x$，则

$$
\begin{cases}
\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} \\
\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\
\sin x\cos x=\dfrac{t}{1+t^2} \\
\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}
\end{cases}
$$

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{t}{1+t^2}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)(1+t^2)}$$

$$=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{1+t^2}\right)\mathrm{d}x$$

由此有 $A(t+1)(t^2+1)+Bt(t^2+1)+(Ct+D)t(t+1)=1$，即

$$\begin{cases}A=1\\A+B+C=0\\A+C+D=0\\A+B+D=0\end{cases}$$

解之得 $A=1$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=-\frac{1}{2}$，$D=-\frac{1}{2}$，所以

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\frac{t+1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\ln(1+t^2)-\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\ln|\tan x+1|-\frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x)-\frac{1}{2}x+C$$

$$=\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\ln|\tan x+1|-\frac{1}{4}\ln|\sec x|-\frac{1}{2}x+C.$$

3．万能变换

若被积函数为一般的 $R(\sin x,\cos x)$，则必须用万能变换．令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}\\\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\\\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$$

例 4 计算 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解　被积函数属 $R(\sin x,\cos x)$，但是不具备正弦、余弦变换特性，也不具备正切变换特性，只能利用万能变换．令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x&=\int\frac{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+2t}\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C\\&=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\end{aligned}$$

例 5　计算 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}$．

解　本例也只能用万能变换才能将被积函数变成有理函数．令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，则

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}\\&=\int\frac{\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{5+\dfrac{8t}{1+t^2}}\\&=\int\frac{2\mathrm{d}t}{5t^2+8t+5}\\&=\frac{2}{5}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}\\&=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\arctan\left(\frac{5}{3}\left(t+\frac{4}{5}\right)\right)+C\\&=\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5\tan\dfrac{x}{2}+4}{3}\right)+C\end{aligned}$$

6.5.2 形如 $R(\sinh x,\cosh x)$的积分

1．双曲正弦、余弦变换

若被积函数为 $R(\sinh x,\cosh x)$，且满足

$$R(-\sinh x,\cosh x)=-R(\sinh x,\cosh x)$$

则用双曲余弦变换；若满足

$$R(\sinh x,-\cosh x)=-R(\sinh x,\cosh x)$$

则用双曲正弦变换.

例 6 计算 $\int\frac{\cosh 2x}{\sinh x}\mathrm{d}x$.

解 $R(x)=\frac{\cosh^2 x+\sinh^2 x}{\sinh x}$，$R(-\sinh x,\cosh x)=-R(\sinh x,\cosh x)$，所以可用双曲余弦变换. 令 $t=\cosh x$，$\mathrm{d}t=\sinh x\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{\sinh x}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\cosh 2x}{\sinh x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\cosh^2 x+\sinh^2 x}{\sinh x}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1+2\sin^2 x}{\sinh^2 x}\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{1}{\sinh^2 x}+2\right)\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{1}{\cosh^2 x-1}+2\right)\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{1}{t^2-1}+2\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+2t+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cosh x}{1-\cosh x}\right|+2\cosh^2 x+C\end{aligned}$$

例 7 计算 $\int\coth^3(2x+3)\mathrm{d}x$.

解 因为有

$$R(-\sinh(2x+3),\cosh(2x+3))=-R(\sinh(2x+3),\cosh(2x+3))$$
$$R(\sinh(2x+3),-\cosh(2x+3))=-R(\sinh(2x+3),\cosh(2x+3))$$

所以既可用双曲余弦变换，又可用双曲正弦变换. 考虑到分母是双曲正弦函数，所以宜用双曲正弦变换. 令 $t=\sinh(2x+3)$，$\mathrm{d}t=2\cosh(2x+3)\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\int\coth^3(2x+3)\mathrm{d}x &= \int\frac{\cosh^3(2x+3)}{\sinh^3(2x+3)}\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{\cosh^2(2x+3)}{2\sinh^3(2x+3)}\mathrm{d}t\\ &= \int\frac{1+t^2}{2t^3}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{2}\ln|t|+C\\ &= -\frac{1}{4\sinh^2(2x+3)}+\frac{1}{2}\ln|\sinh(2x+3)|+C\end{aligned}$$

2．双曲正切变换

若 $R(-\sinh x,-\cosh x)=R(\sinh x,\cosh x)$，则可用双曲正切变换.

略.

注：无双曲万能变换.

6.5.3* 一些特殊根式函数的积分

1．形如 $\int f\left(x,\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 m 为整数，$\alpha\delta\neq\beta\gamma$

令 $t=\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$，则有 $x=\varphi(t)=\dfrac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}$，于是

$$\int f\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t),t)\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

而 $f(\varphi(t),t)\varphi'(t)$ 是有理函数.

例 8　计算 $\int\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

解　被积函数只含 $\sqrt{x+1}$，其中 $(x+1)^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^4$，令 $t=\sqrt{x+1}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=2\int\frac{t+2}{t^3-1}\mathrm{d}t &= \int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t\\ &= \ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\\ &= \ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

例 9 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}$.

解 由于 $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{x+1}$，令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，有 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，$\mathrm{d}x=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}
\text{上式}&=-3\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3-1}=\int\left(\frac{-1}{t-1}+\frac{t-2}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C\\
&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)^2}\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x-1}}+C.
\end{aligned}$$

2．形如 $\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ 的积分

（1）当 $a>0$ 时，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$，则

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},\quad \mathrm{d}x=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\mathrm{d}t,$$

这样被积函数就有理化了.

（2）当 $c>0$ 时，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$，则

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2},\quad \mathrm{d}x=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

于是被积函数也有理化了.

（3）$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$，$\lambda$ 和 μ 为相异实根，令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$，则

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a},\quad \mathrm{d}x=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}\mathrm{d}t,$$

这样被积函数就有理化了.

以上积分称为欧拉积分.

例 10 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

解 $a=1>0$，令 $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$，则 $x=\frac{t^2-1}{2t-1}$，$\mathrm{d}x=\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\mathrm{d}t$，故

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=2\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|+C$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right|-\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right|+C.$$

例 11　计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x+1}}$.

解　$c=1>0$，令 $\sqrt{-x^2+x+1}=tx-1$，则

$$x=\frac{1+2t}{1+t^2}，\quad \mathrm{d}x=2\frac{1-t-t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t，\quad \sqrt{-x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{1+t^2}$$

故

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x+1}}&=2\int\frac{1+t^2}{t^2+t-1}\frac{1-t-t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t\\&=-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=-2\arctan t+C\\&=-2\arctan\frac{1+\sqrt{-x^2+x+1}}{x}+C\end{aligned}$$

例 12　计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

解　$a^2-x^2=(a-x)(a+x)$，设 $-a<x<a$，令 $t=\sqrt{a^2-x^2}$，则

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1}，\quad \mathrm{d}x=\frac{4at}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t，\quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1}，\quad x^2+a^2=\frac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}$$

故

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}&=\frac{1}{2a^2}\int\frac{2t^2+2}{t^4+1}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a^2}\int\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2}a^2}(\arctan(\sqrt{2}t+1)+\arctan(\sqrt{2}t-1))+C\\&=\frac{1}{\sqrt{2}a^2}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-1\right)\right)+C\end{aligned}$$

6.6　第二换元法

第二换元法和第一换元法都基于复合函数的微分算法，第一换元法以被积函数的一部分

作为中间变量进行换元变换，第二换元法直接将被积函数中的自变量作为中间变量进行换元变换．第二换元法换元范围很窄．第二换元法换元过程如下：

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(x(t))\mathrm{d}x(t)=\int f(x(t))x'(t)\mathrm{d}t$$

令

$$g(t)=f(x(t))x'(t)$$

若

$$\int g(t)\mathrm{d}t=G(t)+C$$

则

$$\int f(x)dx=\int g(t)\mathrm{d}t=G(t)+C=G(x^{-1}(x))+C \tag{6-1}$$

式（6-1）中，

$$x(t)=\begin{cases} a\sin t & f(x)=(a^2-x^2)^{n/2} & n\text{为正负奇数} \\ a\sinh t\text{或}a\tan t & f(x)=(a^2+x^2)^{n/2} & n\text{为正负奇数} \\ a\cosh\text{或}a\coth t & f(x)=(x^2-a^2)^{n/2} & n\text{为正负奇数} \end{cases}$$

6.6.1 形如$\int(a^2-x^2)^{n/2}\mathrm{d}x$的积分

这里积分须用第二换元法．

令 $x=|a|\sin t$，$|t|<\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{d}x=|a|\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}\int(a^2-x^2)^{n/2}\mathrm{d}x&=|a|^n\int(1-\sin^2 t)^{n/2}\cdot|a|\cdot\cos t\mathrm{d}t\\&=\int|a|^{n+1}\cos^{n+1}t\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例 1 计算 $\int(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x$.

解 此例 $n=1$，$a^2=1$，令 $x=\sin t$ 得

$$\begin{aligned}\int(1-x^2)^{1/2}\mathrm{d}x&=\int\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C\\&=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\sin t\cos t+C\\&=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

例 2　计算 $\int (4-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x$.

解　本例 $a^2=4$，$n=3$，令 $x=2\sin t$ 得

$$\begin{aligned}
\int (4-x^2)^{3/2}\mathrm{d}x &= 2^4\int \cos^4 t\mathrm{d}t \\
&= 2^4\int\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t \\
&= 2^4\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2^4\left(\frac{t}{4}+\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{t}{8}+\frac{1}{32}\sin 4t\right)+C \\
&= 6t+4\sin 2t+\frac{1}{2}\sin 4t+C \\
&= 6\arcsin\frac{x}{2}+4\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

例 3　计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2^2-x^2)^{1/2}}$.

解　本例 $a=2$，$n=-1$，令 $x=2\sin t$ 得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2^2-x^2)^{1/2}}=\int \frac{\mathrm{d}\frac{x}{2}}{\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{1/2}}=\arcsin\frac{x}{2}+C$$

例 4　计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

解　本例 $a=1$，$n=-3$，令 $x=\sin t$ 得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^{3/2}}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \\
&= \tan t+C \\
&= \tan\arcsin x=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C
\end{aligned}$$

当 $n>3$ 时，仍可利用第二换元法以及乘积化和差公式与倍角公式将被积函数转换成正弦、余弦函数的代数和，从基本积分表中找到原函数.

当 $n<-3$ 时，则需要做正切变换才能找到原函数，也就是说，先用第二换元法再用第一换元法才能找到原函数（后面具体介绍）.

6.6.2 形如$\int(x^2 \pm a^2)^{n/2}\mathrm{d}x$的积分

上面的积分中，若n为偶数或$a=0$，被积函数为幂函数，积分容易，这里只介绍n为奇数且$a \neq 0$（不妨设$a>0$）的积分．上面的积分须用第二换元法做双曲正弦、余弦变换．

1．当$n=1$时，对于$\int(x^2+a^2)^{1/2}\mathrm{d}x$做双曲正弦变换

令$x=a\sinh t$，则

$$
\begin{aligned}
\int(x^2+a^2)^{1/2}\mathrm{d}x &= \int a(\sinh^2 t+1)^{1/2}\mathrm{d}(a\sinh t) \\
&= \int a^2\cosh^2 t\mathrm{d}t \\
&= a^2\int\frac{1+\cosh 2t}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sinh 2t+C \\
&= \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}\sinh\left(2\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right)+C
\end{aligned}
$$

对于$\int(x^2-a^2)^{1/2}\mathrm{d}x$做双曲余弦变换，令$x=a\cosh t$，则

$$
\begin{aligned}
\int(x^2-a^2)^{1/2}\mathrm{d}x &= \int a(\cosh^2 t-1)^{1/2}\cdot a\sinh t\mathrm{d}t \\
&= \int a^2\sinh^2 t\mathrm{d}t \\
&= a^2\int\frac{\cosh 2t-1}{2}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sinh 2t+C \\
&= -\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}\sinh(2\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a})+C
\end{aligned}
$$

2．当$n=3$时，对于$\int(x^2+a^2)^{3/2}\mathrm{d}x$，令$x=a\sinh t$，则

$$
\begin{aligned}
\int(x^2+a^2)^{3/2}\mathrm{d}x &= a^4\int(1+\sinh^2 t)^{3/2}a\cosh t\mathrm{d}t \\
&= a^4\int\cosh^4 t\mathrm{d}t \\
&= a^4\int\left(\frac{1+\cosh 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t \\
&= a^4\int\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cosh 2t+\frac{1}{4}\frac{1+\cosh 4h}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^4}{4}t+\frac{a^4}{4}\sinh 2t+\frac{a^4}{8}t+\frac{a^4}{32}\sinh 4t+C \\
&= a^4\left(\frac{3}{8}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+\frac{1}{4}\sinh(2\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a})+\frac{1}{32}\sinh(4\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a})\right)+C
\end{aligned}
$$

对于 $\int (x^2-a^2)^{3/2}\mathrm{d}x$，留做作业.

3．当 $n=-1$ 时，对于 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$，令 $x=a\sinh t$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int \frac{a\cosh t\mathrm{d}t}{a\sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$=t+C=\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+C.$$

对于 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$，留做作业.

4．当 $n=-3$ 时，对于 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$，令 $x=a\sinh t$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\int \frac{a\cosh t\mathrm{d}t}{a^3(1+\sinh^2 t)^{3/2}}$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cosh^2 t}$$

$$=\frac{1}{a^2}\tanh t+C$$

$$=\frac{1}{a^2}\tanh\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+C.$$

实际上，当 $n=-3,-5,\cdots$ 时，可做 $x=\tan t$ 变换，此时计算更简单.

例 5　计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^{3/2}}$.

解　令 $x=2\tan t$，则 $\mathrm{d}x=2\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$，$\frac{1}{(x^2+2^2)^{3/2}}=\frac{\cos^3 t}{2^3}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^{3/2}}=\int \frac{1}{2^2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2^2}\sin t+C$$

$$=\frac{1}{2^2}\sin\arctan\frac{x}{2}+C$$

由上面的积分可立即得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{5/2}}=\frac{1}{a^4}\int \cos^3 t\mathrm{d}t.$$

利用正弦变换很容易找到 $\int\cos^3 t\mathrm{d}t$ 的原函数.

对于 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{n/2}}$，若 n 较大，例如 $n=3,5,\cdots$，可做 $x=\coth t$ 变换，此时积分会变得较简单.

例 6 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{3/2}}$.

解 令 $x=a\coth t$，则 $\mathrm{d}x=a\frac{\mathrm{d}t}{\sinh^2 t}$，$\frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^3}\frac{1}{\left(\frac{\cosh^2 t-\sinh^2 t}{\sinh^2 t}\right)^{3/2}}=\frac{1}{a^3}\sinh^3 t$，

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{3/2}}&=\frac{1}{a^2}\int\sinh t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a^2}\cosh t+C\\&=\frac{1}{a^2}\cosh\operatorname{arc}\coth\frac{x}{a}+C.\end{aligned}$$

以上诸例配方不需要手工完成，不少算例配方需要手工完成.

例 7 计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)^2+1^2}}$，令 $x+2=\sinh t$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+5}}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)^2+1^2}}\\&=\int\frac{\cosh t}{\cosh t}\mathrm{d}t\\&=t+C\\&=\operatorname{arc}\sinh(x+2)+C.\end{aligned}$$

6.7 分部积分法

分部积分法是乘积函数微分法的逆运算，是不定积分的重要算法之一.

6.7.1 分部积分法的充要条件

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都具有连续导数，由乘积函数的导数计算公式有

$$(uv)'=u'v+uv',$$

移项得

$$uv' = (uv)' - u'v,$$

对等式两边积分得

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\mathrm{d}x \tag{7-1}$$

式（7-1）称为分部积分法基础公式，在此基础上，下面给出分部积分法的详细计算公式．设被积函数 $f(x) = u_0(x)v_0(x)$ 是连续函数，按式（7-1）且将其一直计算下去有

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int u_0(x)v_0(x)\mathrm{d}x \\ &= \int u_0(x)\mathrm{d}v_1(x) \\ &= u_0(x)v_1(x) - \int v_1(x)\mathrm{d}u_0(x) \\ &= u_0(x)v_1(x) - \int v_1(x)u_1(x)\mathrm{d}x \\ &= \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}u_{i-1}(x)v_i(x) + (-1)^{k+2}\int u_k(x)v_k(x)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{7-2}$$

式中

$$\begin{cases} v_i(x) = \int v_{i-1}(x)\mathrm{d}x \\ u_i(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u_{i-1}(x) \end{cases},\quad i = 1,2,\cdots,k$$

式（7-2）是实用分部积分公式，为了方便计算，$v_i(x)$ 中不包含积分常数．

由式（7-2），可看出使用分部积分法的必要条件是

$$v_i(x) = \int v_{i-1}(x)\mathrm{d}x,\quad i = 1,2,\cdots,k$$

即 $v_{i-1}(x)$ 的原函数找得到是使用分部积分法的必要条件．

由式（7-2），可看出使用分部积分法的充分条件是：

（1）存在 k，$u_k(x) = a \neq 0$，$v_{k+1}(x) = a\int v_k(x)\mathrm{d}x$，此时有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}u_{i-1}(x)v_i(x) + (-1)^{k+2}av_{k+1}(x) + C;$$

（2）存在 k，$(-1)^{k+2}u_k(x)v_k(x) = a\int u_0(x)v_0(x)\mathrm{d}x$，$a \neq 1$，此时有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{1-a}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}u_{i-1}(x)v_i(x) + C;$$

（3）存在 k，$\int u_k(x)v_k(x)\mathrm{d}x$ 满足条件（1）或条件（2）．

后面把上述充分条件分别称为充分条件一、充分条件二和充分条件三．

6.7.2 满足充分条件一的函数类型及其积分

满足充分条件一的被积函数有两大子类：

1．$f(x)=(ax+b)^{\mu}\ln^{m}(ax+b)$

式中 $a\neq 0$，μ 为任意实数，m 为整数.

例 1 计算 $\int(2x+3)^{1/3}\ln(2x+3)\mathrm{d}x$.

解 取 $u_0(x)=\ln(2x+3)$，$v_0(x)=(2x+3)^{1/3}$.

$$\begin{aligned}\int(2x+3)^{1/3}\ln(2x+3)\mathrm{d}x&=\frac{3}{8}(2x+3)^{4/3}\ln(2x+3)-\frac{3}{4}\int(2x+3)^{1/3}\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{8}(2x+3)^{4/3}\ln(2x+3)-\frac{9}{32}(2x+3)^{4/3}+C.\end{aligned}$$

2．$u_0(x)=(ax+b)^{k}$，$v_0(x)$ 为指数函数、正弦函数、余弦函数、双曲正弦函数或双曲余弦函数

例 2 计算 $\int(x+3)^{2}\sin(x+\pi/4)\mathrm{d}x$.

解 本例 $u_0(x)=(x+3)^2$，$v_0(x)=\sin(x+\pi/4)$.

$$\begin{aligned}\int(x+3)^{2}\sin(x+\pi/4)\mathrm{d}x&=-(x+3)^{2}\cos(x+\pi/4)+\int 2(x+3)\cos(x+\pi/4)\mathrm{d}x\\&=-(x+3)^{2}\cos(x+\pi/4)+2(x+3)\sin(x+\pi/4)-\int 2\sin(x+\pi/4)\mathrm{d}x\\&=-(x+3)^{2}\cos(x+\pi/4)+2(x+3)\sin(x+\pi/4)+2\cos(x+\pi/4)+C.\end{aligned}$$

6.7.3 满足充分条件二的函数类型及其积分

满足充分条件二的函数也有两大类型.

1．$u_0(x)$ 为指数函数、正弦函数、余弦函数、双曲正弦函数、双曲余弦函数，$v_0(x)$ 也是上述类型的函数，也就是使用分部积分法时，对于这类积分，$u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 可以互换.

例 3 计算 $\int\mathrm{e}^{x}\sin x\mathrm{d}x$.

解 取 $u_0(x)=\sin x$，$v_0(x)=\mathrm{e}^{x}$，则

$$\begin{aligned}I&=\int\mathrm{e}^{x}\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}\sin x-\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}\sin x\\&=\mathrm{e}^{x}\sin x-\int\mathrm{e}^{x}\cos x\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{x}\sin x-\mathrm{e}^{x}\cos x+\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}\cos x\\&=\mathrm{e}^{x}\sin x-\mathrm{e}^{x}\cos x-\int\mathrm{e}^{x}\sin x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$I=\frac{\mathrm{e}^{x}}{2}(\sin x-\cos x).$$

例 4　计算 $\int 3^x \sinh x\mathrm{d}x$.

解　取 $u_0(x)=\sinh x$，$v_0(x)=3^x$，则

$$\begin{aligned}I&=\int 3^x \sinh x\mathrm{d}x\\&=3^x\ln 3\sinh x-\ln 3\int 3^x\cosh x\mathrm{d}x\\&=3^x\ln 3\sinh x-\ln^2 3\cdot 3^x\cosh x+\int \ln^2 3\cdot 3^x\sinh x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$I=\frac{3^x\ln 3\sinh x-3x\ln^2 3\cosh x}{1-\ln^2 3}.$$

说明：若 $f(x)=\mathrm{e}^x\sinh x$ 或 $\mathrm{e}^x\cosh x$ 不必用也不能用分部积分法，可直接化简成指数函数积分，像 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x$ 这类积分也不必用分部积分法，可通过乘积化和差再积分.

2. $u_0(x)=(ax+b)^\mu$（μ 为实数），$v_0(x)=f(\ln(ax+b))$，f 可以是指数函数，也可以是正弦、余弦函数，还可以是双曲正弦、余弦函数.

例 5　计算 $\int x^\alpha \sin\ln x\mathrm{d}x$.

解　取 $u_0(x)=\sin\ln x$，$v_0(x)=x^\alpha$，则

$$\begin{aligned}I&=\int x^\alpha\sin\ln x\mathrm{d}x\\&=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\sin\ln x-\frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha\cos\ln x\mathrm{d}x\\&=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\sin\ln x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\cos\ln x-\frac{1}{(\alpha+1)^2}\int x^\alpha\sin\ln x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$I=\frac{\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\sin\ln x-\dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\cos\ln x}{1+\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}}.$$

6.7.4　满足充分条件三的函数类型及其积分

满足充分条件三的函数也有两大类.

1. $u_0(x)=\log_c^m(ax+b)$，$v_0(x)=(\alpha x+\beta)^k$.

上式中 a 和 b 不同时等于 α 和 β，k 和 m 为整数.

例 6　计算 $\int (2x+1)\ln(x+1)\mathrm{d}x$.

解　取 $u_0(x)=\ln(x+1)$，$v_0(x)=2x+1$，则

$$\begin{aligned}\int(2x+1)\ln(x+1)\mathrm{d}x&=\frac{1}{4}(2x+1)^2\ln(x+1)-\int\frac{1}{4}\frac{(2x+1)^3}{x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}(2x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}\int\left(4x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}(2x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln(x+1)+C.\end{aligned}$$

2．$u_0(x)=(ax+b)^k$，k 为整数；$v_0(x)$ 为满足条件二的函数的乘积.

例 7　计算 $\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解　令 $I_1=\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$，$I_2=\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$，则

$$I_1=\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\sin x-\mathrm{e}^x\cos x-\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x,$$

所以

$$I_1=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C_1,$$

$$I_2=\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x+I_1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x\cos x-\mathrm{e}^x\sin x).$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x\\&=xI_1-\int I_1\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2\\&=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x+C.\end{aligned}$$

6.8　混合积分

所谓混合积分，是指既要用换元法又要用分部积分法的积分法，也指既要用第一换元法又要用第二换元法的积分法.

前面已经指出，第一换元法换元的目的之一是将被积函数转换成可用分部积分法积分的函数.

6.8.1　先用第一换元法再用分部积分法积分的函数类型和积分

需要使用这类积分方法的函数有三类.

1．形如 $\int x^k f(x^{1/p})\mathrm{d}x$ 的积分

式中 f 可以是指数函数，正弦、余弦函数，双曲正弦或双曲余弦函数，其中 k 和 p 为整数．这类积分的积分步骤为：

（1）利用第一换元法，令 $y=x^{1/p}$， $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}x$， $\mathrm{d}x=px^{\frac{p-1}{p}}\mathrm{d}y=py^{p-1}\mathrm{d}y$， $x^k=y^{pk}$，将被积函数转换成满足分部积分法充分条件一的函数．

（2）用分部积分法积分．

例 1　计算 $\int \mathrm{e}^{x^{1/4}}\mathrm{d}x$.

解　令 $y=x^{\frac{1}{4}}$， $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1}\mathrm{d}x$， $\mathrm{d}x=4y^{4-1}\mathrm{d}y=4y^3\mathrm{d}y$，则

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{x^{1/4}}\mathrm{d}x&=\int 4y^3\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\\&=4y^3\mathrm{e}^y-12\int y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\\&=4y^3\mathrm{e}^y-12y^2\mathrm{e}^y+24\int y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\\&=4y^3\mathrm{e}^y-12y^2\mathrm{e}^y+24y\mathrm{e}^y-24\mathrm{e}^y+C\\&=4x^{\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{x^{\frac{1}{4}}}-12x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{x^{\frac{1}{4}}}+24x^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{x^{\frac{1}{4}}}-24\mathrm{e}^{x^{\frac{1}{4}}}+C.\end{aligned}$$

2．形如 $\int x^\alpha f(x^{\frac{q}{p}})\mathrm{d}x$ 的积分

上式中 $\alpha+\dfrac{p}{q-p}=k\dfrac{q}{p}$， k 为整数．这类积分的计算过程和上面的积分类似．

例 2　计算 $\int x\mathrm{e}^{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x$.

解　本例中 $\alpha=1$， $q=2$， $p=3$，令 $y=x^{\frac{2}{3}}$， $\mathrm{d}y=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$， $\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y$，则

$$\begin{aligned}\int x\mathrm{e}^{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x&=\frac{3}{2}\int x^{\frac{4}{3}}\mathrm{e}^{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{2}\int y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{2}y^2\mathrm{e}^y-\int 3y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{2}y^2\mathrm{e}^y-3y\mathrm{e}^y+3\int \mathrm{e}^y\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{2}y^2\mathrm{e}^y-3y\mathrm{e}^y+3\mathrm{e}^y+C$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}\mathrm{e}^{x^{\frac{2}{3}}}-3x^{\frac{2}{3}}\mathrm{e}^{x^{\frac{2}{3}}}+3\mathrm{e}^{x^{\frac{2}{3}}}+C.$$

3．形如 $\int u(x)v(x)f(u(x))\mathrm{d}x$ 的积分

式中 $\mathrm{d}u(x)=av(x)\mathrm{d}x$， $u(x)f(u(x))$ 可用分部积分法找到原函数.

例 3 计算 $\int\sin 2x\cos\ln\sin x\mathrm{d}x$.

解 $\int\sin 2x\cos\ln\sin x\mathrm{d}x=2\int\sin x\cos x\cos\ln\sin x\mathrm{d}x$，因为 $\mathrm{d}\sin x=\cos x\mathrm{d}x$，所以

$$2\int\sin x\cos x\cos\ln\sin x\mathrm{d}x=2\int\sin x\cos\ln\sin x\mathrm{d}\sin x$$
$$=2\int y\cos\ln y\mathrm{d}y$$
$$=y^2\cos\ln y-\int y^2\mathrm{d}\cos\ln y$$
$$=y^2\cos\ln y-\int y\sin\ln y\mathrm{d}y$$
$$=y^2\cos\ln y-\frac{1}{2}y^2\sin\ln y+\frac{1}{2}\int y\cos\ln y\mathrm{d}y.$$

而

$$\int y\cos\ln y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\left(y^2\cos\ln y-\frac{1}{2}y^2\sin\ln y\right),$$

所以

$$\int\sin 2x\cos\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\left(y^2\cos\ln y-\frac{1}{2}y^2\sin\ln y\right)+C$$
$$=\frac{4}{3}\left(\sin^2 x\cos\ln\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x\sin\ln\sin x\right)+C.$$

这类积分很多，下面再举一例.

例 4 计算 $\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $y=x^2$， $\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$， $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{2x}$，则

$$\int x^3\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}y\mathrm{e}^y-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}ye^{y}-\frac{1}{2}e^{y}+C$$
$$=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

6.8.2　先用分部积分法再用第一换元法的函数类型和积分

若被积函数是基本函数的反函数，则先用分部积分法再用第一换元法可找到原函数．上述反函数包括 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\mathrm{arc}\cot x$，$\mathrm{arc}\sinh x$，$\mathrm{arc}\cosh x$．

例 5　计算 $\int \arctan x\mathrm{d}x$．

解　将 $\arctan x$ 看成是 1 与 $\arctan x$ 的乘积，取 $v_0(x)=1$，$u_0(x)=\arctan x$，则有

$$\begin{aligned}\int \arctan x\mathrm{d}x &= x\arctan x-\int x\mathrm{d}\arctan x\\ &= x\arctan x-\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x^2}{1+x^2}\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

例 6　计算 $\int \mathrm{arc}\sinh x\mathrm{d}x$．

解　$\mathrm{arc}\sinh x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则

$$\begin{aligned}\int \mathrm{arc}\sinh x\mathrm{d}x &= x\,\mathrm{arc}\sinh x-\int x\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\ &= x\,\mathrm{arc}\sinh x-\int x\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\ &= x\,\mathrm{arc}\sinh x-\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= x\,\mathrm{arc}\sinh x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= x\,\mathrm{arc}\sinh x-\sqrt{1+x^2}+C.\end{aligned}$$

6.8.3　先用第二换元法再用第一换元法的函数类型和积分

第二换元法使用范围较窄，用第二换元法再用第一换元法的例子也不多．

例 7　计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{5/2}}$．

解　令 $x=\sin t$，$\dfrac{1}{(1-x^2)^{5/2}}=\dfrac{1}{\cos^5 t}$，$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{5/2}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^4 t}.$$

上式满足正切变换要求，令 $y=\tan t$，则

$$t=\arctan y,\quad \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2},\quad \cos^4 t=\frac{1}{(1+y^2)^2},\quad \frac{1}{\cos^4 t}=(1+y^2)^2.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{5/2}}&=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^4 t}\\&=\int(1+y^2)^2\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\\&=\int(1+y^2)\mathrm{d}y\\&=y+\frac{1}{3}y^3+C\\&=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan^3 x+C.\end{aligned}$$

6.8.4　先用第一换元法再用第二换元法的函数类型和积分

由于第二换元法使用范围较窄，故这类积分范围也窄．对于

$$\begin{cases}\int(f^2(x)\pm a^2)^{n/2}f'(x)\mathrm{d}x\\ \int(a^2-f^2(x))^{n/2}f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}$$

都须先用第一换元法再用第二换元法才能得到原函数．

例 8　计算 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x}{(a^2+\mathrm{e}^{2x})^{1/2}}\mathrm{d}x$．

解　令 $y=\mathrm{e}^x$，$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^x}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{e}^x}{(a^2+\mathrm{e}^{2x})^{1/2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)^{1/2}}\\&\xlongequal{y=a\sinh t}\int\frac{a\cosh t\mathrm{d}t}{a(1+\sinh^2 t)^{1/2}}\\&=\int\mathrm{d}t=t+C\\&=a\sinh y+C\\&=a\sinh \mathrm{e}^x+C.\end{aligned}$$

思　考　题

1．是否任何函数都有原函数？

2．若 $f(x)$ 有原函数，原函数是否是唯一的？

3．如果 $F(x)$，$H(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，它们有什么关系？

习　　题

求下列不定积分（利用简单公式）：

1．$\int(1-2x)\mathrm{d}x$

2．$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

3．$\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x$

4．$\int\sqrt[m]{x^n}\mathrm{d}x$

5．$\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$

6．$\int\frac{\sqrt{x}-x^3\sqrt{\mathrm{e}^x}+x^2}{x^3}\mathrm{d}x$

7．$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

8．$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

9．$\int\frac{\sqrt{x^2}+1}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$

10．$\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

11．$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$

12．$\int\cos^2 x\mathrm{d}x$

13．$\int\frac{x^2+3}{x^2-1}\mathrm{d}x$

14．$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$

15．$\int\tan^2 x\mathrm{d}x$

16．$\int\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}}$

17．$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$

18．$\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$

19．$\int\frac{x^2+7x+12}{x+4}\mathrm{d}x$

20．$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$

用换元法求下列不定积分：

21．$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

22．$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x$

23．$\int\sin^3 x\mathrm{d}x$

24．$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

25．$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

26．$\int(2x-3)^{100}\mathrm{d}x$

27. $\int \sin 3x\mathrm{d}x$

28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$

29. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+9x^2}$

30. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$

31. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^8-4}}$

32. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

33. $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$

34. $\int \cos x\sin^3 x\mathrm{d}x$

35. $\int (\mathrm{e}^x+1)^3\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

36. $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

37. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$

38. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}$

39. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x+1}}$

40. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

41. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$

42. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$

43. $\int \cot(2x+1)\mathrm{d}x$

44. $\int \frac{x^4\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^5}}$

45. $\int \frac{(6x-5)\mathrm{d}x}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$

46. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x$

47. $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x$

48. $\int \mathrm{e}^{2x^2+\ln x}\mathrm{d}x$

49. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$

50. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

51. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+1}}\mathrm{d}x$

52. $\int \mathrm{e}^{x^3}x^2\mathrm{d}x$

53. $\int \frac{(x+0.8)\cos(\ln(x^2+x+1)+5)}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

54. $\int \mathrm{e}^{\sin(2x^2+5x+4)+\cos x}(2x+5)(\cos(2x^2+5x+4)-\sin x)\mathrm{d}x$

用分部积分法求下列不定积分：

55. $\int x\sin 2x\mathrm{d}x$

56. $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

57. $\int x\sinh x\mathrm{d}x$

58. $\int x^2a^x\mathrm{d}x$

59. $\int x^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$

60. $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$

61. $\int x\arcsin^{-1}x\mathrm{d}x$

62. $\int x^n\ln x\mathrm{d}x$

63. $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$

64. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

65. $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x$

66. $\int x^2\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$

67．$\int \sin x \ln(\tan x)\mathrm{d}x$

68．$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$

69．$\int \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

70．$\int \frac{x^2}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

71．$\int \sin 3x \sinh(4x+5)\mathrm{d}x$

72．$\int a^{3x}\cosh(2x+5)\mathrm{d}x$

利用分项积分法计算下列积分：

73．$\int \frac{x^5}{x+1}\mathrm{d}x$

74．$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$

75．$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}$

76．$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+3x^2+2}$

77．$\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\mathrm{d}x$

78．$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\mathrm{d}x$

79．$\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2}\mathrm{d}x$

80．$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$

81．$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)}$

82．$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

83．$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^3 x}$

计算下列含三角函数或双曲函数的积分：

84．$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$

85．$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x$

86．$\int \sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x$

87．$\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\mathrm{d}x$

88．$\int \cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x$

89．$\int \cos^4 x\mathrm{d}x$

90．$\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$

91．$\int (\tan^2 x+\tan^4 x)\mathrm{d}x$

92．$\int \sinh^3(3x+2)\mathrm{d}x$

93．$\int \tanh(2x+1)\mathrm{d}x$

94．$\int \cosh^2 x\tanh x\mathrm{d}x$

用换元法加分部积分法计算下列积分：

95．$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

96．$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

97．$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

98．$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x^2}}$

99．$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}$

100．$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2-1}}$

101．$\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$

102．$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

103． $\int\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$

104． $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$

105． $\int x^{5}e^{x^{3}}dx$

求下列 $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$ 的积分：

106． $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

107． $\int(x-2)^{-\frac{3}{4}}(x+1)^{-\frac{1}{4}}dx$

108． $\int\sqrt{\frac{1-x}{x-2}}dx$

109． $\int\frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

求下列 $\int x^{m}(a+bx^{n})^{p}dx$ 的积分：

110． $\int\sqrt{x^{3}+x^{4}}dx$

111． $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^{2}}}}$

112． $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^{3}}}$

113． $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^{4}}}$

利用欧拉变换计算下列积分：

114． $\int\frac{x-\sqrt{x^{2}+3x+2}}{x+\sqrt{x^{2}+3x+2}}dx$

115． $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^{2}+x+1}}$

116． $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^{2}}}$

计算下列含 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的积分：

117． $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$

118． $\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

119． $\int\frac{\sin x}{\sin^{2}x+\cos^{3}x}dx$

120． $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

121． $\int\frac{\sin^{2}x}{1+\sin^{2}x}dx$

第 7 章　定　积　分

不定积分和定积分是积分学中的两大基本问题，虽然不定积分是微分运算的逆运算，而定积分源于曲线所围成图形的面积计算，两者既然都有积分二字，当然应有联系．这一章既介绍定积分的特有性质，又介绍定积分和不定积分的联系．

7.1　定积分基本概念

定积分源于封闭曲线的面积计算．

7.1.1　定积分引入

如图 7-1 所示，函数 $y=f(x)>0$，$x\in[a,b]$，要计算直线 $y=0$，$x=a$，$x=b$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围成的面积（见图 7-1）．

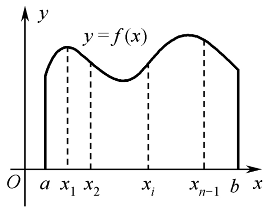

图 7-1

显然图 7-1 是一曲边梯形，对于一般 $f(x)$ 而言，目前尚无通用算法算出所有 $f(x)$ 各自对应的曲边梯形的面积的理论解，不过如图 7-1 所示，将曲边梯形划分成无限多个小曲边梯形，当小曲边梯形的高 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 都充分小时，小曲边梯形可近似看成小矩形，$[x_{i-1},x_i]$ 上任一点 ξ_i 对应的 $f(\xi_i)$ 都可认为是矩形的长，这样图形的面积可近似表示成

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1-1}$$

Δx_i 都充分小，意味着 $\max(\Delta x_i)$ 也充分小．

不少工程物理问题最后也归结成计算与式（1-1）类似的算式．例如要计算变速直线运动由时刻 t_1 到 t_2 所经过的路程时，可以将 t_2-t_1 这个时间段划分成若干小时间段，将在每一小时间段内的运动看成是匀速直线运动，并以每一小段时间中任意时刻 η_i 的速度 $v(\eta_i)$ 作为速度．这样，路程的计算公式就为

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}v(\eta_i)\Delta t_i \tag{1-2}$$

7.1.2　定积分定义

虽然上述两式中变量不同，含义不同，但数学本质和运算规律一样．为了给出定积分的

定义，我们先不考虑问题本身的意义，抽象出两式的数学本质和规律.

两式的推导过程中都会将大区间划分成若干小区间，且要求小区间充分小，因此我们先对小区间的划分作数学上的定义.

【定义 1】设闭区间$[a,b]$上有$n+1$个分点，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，其中$i=1,2,\cdots,n$，记

$$T=\max\{\Delta x_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$$

为T分割.

T分割有两个内容，其一是给出了$n+1$个分点，同时构成了n个小区间；其二是给出了最大子区间.

【定义 2】设$f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的函数，任给一个T分割，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则称

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

为黎曼和或积分和.

【定义 3】设$f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的函数，s是一个确定的数，若对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对$[a,b]$上的任何分割T，以及在其上所选的任意点集$\{\xi_i\}$，只要$T<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-s\right|<\varepsilon ,$$

则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积或黎曼可积；数s是$f(x)$在$[a,b]$上的黎曼积分或定积分，并记为

$$s=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{1-3}$$

其中$f(x)$为被积函数，x为积分变量，$[a,b]$为积分区间，a和b分别称为这个定积分的下限和上限. 定积分的概念是法国数学家黎曼给出的，为区别其他积分，常称定积分为黎曼积分.

式（1-3）中点集$\{\xi_i\}$不是唯一的，Δx_i也不是唯一的，T分割也不是唯一的，只要求$T\to 0$. 显然，定积分极限比一般函数极限复杂很多. 函数f在区间$[a,b]$上的定积分存在与否以及它的数值，只与函数规律f本身和区间有关，因而与积分变量所取符号无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi .$$

对于闭区间$[a,b]$，总应满足$b\geqslant a$，但是按定积分的定义，b可以小于a，此时做分割T，使$a=x_0>x_1>\cdots>x_n=b$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，且$T=\max\limits_i\{|\Delta x_i| \mid i=1,2,\cdots,n\}$，

$$s=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

按定义有

$$s=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

作同样的分割，计算黎曼和：

$$s_1 = \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(-\Delta x_i)$$

按定义有

$$s_1 = \int_b^a f(x)\mathrm{d}x\ .$$

由此有

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ .$$

也就是说，定积分定义中，只要求所有 $\Delta x_i \to 0$，并没有要求 $\Delta x_i > 0$.

例 1　计算由直线 $y=0$ ， $x=0$ ， $x=1$ 和曲线 $y=x^2$ 所围的面积.

解　取 $x_i=\dfrac{i}{n}$ ， $i=0,1,2,\cdots,n$ ， $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$ ，则 $f(\xi_i)=x_i^2$ ，按定积分的定义有（ $T\to 0$ 和 $n\to\infty$ 等价）

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}\ .$$

若取 $f(\xi_i)=x_{i-1}^2=\left(\dfrac{i-1}{n}\right)^2$ ，则有

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}\ .$$

当 $\dfrac{i-1}{n}<\xi_i<\dfrac{i}{n}$ 时，利用极限的区间套用定理仍可得出极限为 $\dfrac{1}{3}$，可见黎曼和的极限确实与 ξ_i 的取值无关.

7.1.3　可积函数

显然，函数可积的必要条件是有界，对于无界函数，无论什么 T 一定有一个子区间 $[x_{k-1},x_k]$， $f(x)$ 在其上是无界的，在这个区间上随便取哪个点 ξ_k ，其 $f(\xi_k)$ 都会大于预先给定的任意大的数，于是黎曼和会任意大；对于有界函数也不一定可积，例如狄里克利函数就不可积，如果 ξ_i 都取有理数时，其黎曼和为 0，而都取无理数时，其黎曼和为 1.

【定理 1】若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 可积.

证明　因 $f(x)$ 在闭区间上连续，所以在该区间上一致连续，任给 $\varepsilon>0$ ，存在正数 $\delta>0$ ，对于 $x',x''\in[a,b]$ ，若 $|x'-x''|<\delta$ ，则

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a}\ .$$

作分割 $T=\max\{\Delta x_i\}<\delta$ ，任选点集 $\{\xi_i\}$ 和 $\{\zeta_i\}$， $\xi_i,\zeta_i\in[x_{i-1},x_i]$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\left(f(\xi_i)-f(\zeta_i)\right)\Delta x_i\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| = \varepsilon .$$

故函数 $f(x)$ 在闭区间上可积.

【定理 2】若 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 可积.

证明 不妨设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数. $f(a)<f(b)$（当 $f(a)=f(b)=c$ 时当然可积），作分割 T，令 $\omega_i = f(x_i)-f(x_{i-1})$，于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))T$$
$$=(f(b)-f(a))T .$$

任给 $\varepsilon>0$，只要 $T<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，这时就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon .$$

所以函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积.

【定理 3】若 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上只有有限个间断点的有界函数，则 $f(x)$ 可积.

证明 不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个间断点 b，作分割 T，使 $x_{n-1}=b-\delta'$， $x_n=b$，$a<\delta'<b$，显然 $f(x)$ 在 $[a,b-\delta']$ 上可积，令

$$s=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

设 $M=\max\{|f(\xi)|\,\|\,\xi\in[b-\delta',b]\}$，任给 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta>0$，当 $M\delta'<\varepsilon$，即 $\delta'<\dfrac{\varepsilon}{M}$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - s\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{T\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_n)\Delta x_n\right) = \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = s .$$

所以间断点在 $[a,b]$ 上的 b 点不影响黎曼和的极限.

同样可证明，当间断点不在 b 点或间断点个数大于一个时，也有同样的结论.

7.1.4 定积分的几何意义

定积分是由计算面积而引入的，当 $f(x)\geqslant 0$ 时定积分结果为 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 和 $y=0$ 所围成图形的面积；当 $f(x)<0$ 时，由于

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x ,$$

不妨称上面所得出的面积为负面积，如图 7-2 所示．当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒大于 0 或不恒小于 0 时，可认为定积分是曲线所围成的正负面积的代数和．

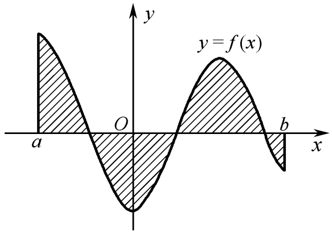

图 7-2

7.2　定积分基本性质

单利用定积分定义计算定积分难度很大，对于不少函数很难算出 $\lim\limits_{T\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ ，因此必须研究定积分的性质．

【性质 1】 $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明　按黎曼积分的定义有

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}cf(\xi_i)\Delta x_i = c\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

【性质 2】 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

证明　按黎曼积分的定义有

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)\pm g(\xi_i))\Delta x_i \\ &= \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

【性质 3】 若 $f(x)$ 在闭区间 I 上可积， $a,b,c\in I$ ，则

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x .$$

证明（1）假设 $a<b<c$ ，作分割 T ，且 $T_1=\max\{\Delta x_i\}=\max\{x_i-x_{i-1}\}$ ， $i=1,2,\cdots,n$ ， $x_0=a$ ， $x_n=b$ ， $T_2=\max\{\Delta x_j\}=\max\{x_j-x_{j-1}\}$ ， $j=n+1,n+2,\cdots,m$ ， $x_m=c$ ．令 $T=\max\{T_1,T_2\}$ ，按定积分定义有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{T_1\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{T_2\to 0}\sum_{i=n+1}^{m}f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

（2）现假设 $a<c<b$ ，由前面的证明有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

由此有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

对于a,b,c的其他排列可仿此证明.

【性质 4】 若$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上可积，且$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 对$[a,b]$作T分割，$T=\max\{\Delta x_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$，分别作黎曼和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$与$\sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$，由于$f(\xi_i)\leqslant g(\xi_i)$，所以$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$，故按定积分定义有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，若$f(x)$在$[a,b]$上可积，且$m<f(x)<M$，则

$$(b-a)m < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < (b-a)M.$$

【性质 5】 若$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 因$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，所以$|f(x)|$在$[a,b]$上也连续，当然也可积，因为

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以，由性质 4 有

$$\int_a^b -|f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

7.3 积分学基本定理

微分学中有中值定理，积分学中也有中值定理.

【定理 1】 若$f(x)$和$g(x)$都是$[a,b]$上的连续函数，$f(x)$在$[a,b]$内不变号，则存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 因$g(x)$是$[a,b]$上的连续函数，故存在m和M使得

$$m \leqslant g(x) \leqslant M .$$

当 $m = M$ 时定理显然成立，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内不变号，不妨设 $f(x) \geqslant 0$，当 $f(x) \equiv 0$ 时定理显然成立，但没有实际意义．下面讨论 $f(x) \geqslant 0$ 的情况，这时有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$，令

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x},$$

显然 $m \leqslant \mu \leqslant M$，由于 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，所以存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$g(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} .$$

综上有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(\xi)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

这个定理称为积分中值定理或积分第一中值定理．

当 $f(x) = 1$ 时，上面定理结论可变成 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b-a)g(\xi)$，即

$$g(\xi) = \frac{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}{b-a}$$

这是广义的平均值计算公式．

【定理 2】若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令

$$\varPhi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

则 $\varPhi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $\varPhi'(x) = f(x)$，即 $\varPhi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数．

证明　由 $\varPhi(x)$ 的定义可知

$$\begin{aligned}\varPhi(x+h) - \varPhi(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)(x+h-x) = hf(\xi),\ \xi \in (x, x+h),\end{aligned}$$

所以

$$f(\xi) = \frac{\varPhi(x+h) - \varPhi(x)}{h} .$$

当 $\xi \to x$，$h \to 0$ 时，对上式两边取极限得

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varPhi(x+h) - \varPhi(x)}{h} = \varPhi'(x),$$

即

$$\varPhi'(x) = f(x) .$$

定理 2 称为积分学基本定理．

【定理 3】若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证明 由已知和上一定理知 $\Phi(x)$ 和 $F(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，所以

$$F(x)=\Phi(x)+C，\quad C \text{为常数}.$$

当 $x=a$ 时，$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$，故 $F(a)=C$，$\Phi(x)=F(x)-F(a)$，由此有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a).$$

所以，当 $x=b$ 时有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

这个定理中 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 称为积分学基本公式．这个公式也称为牛顿－莱布尼兹公式，该公式把定积分和不定积分紧密结合在一起，给定积分指出了一条计算途径．牛顿－莱布尼兹公式也可写成 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(a)-F(b)$.

按定积分的定义，式（1-2）可写成 $s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$，对于作变速直线运动的物体，由路程、速度和时间的关系有 $S=S(t_2)-S(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$.

例 1 利用牛顿－莱布尼兹公式计算

（1）$\int_0^1 x^\mu \mathrm{d}x$，$\mu\neq -1$；

（2）$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 x^\mu \mathrm{d}x=\dfrac{1}{\mu+1}x^{u+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{\mu+1}$.

$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\mathrm{e}-1$.

$\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi=2$.

利用牛顿－莱布尼兹公式及定积分定义还可计算一些极限.

例 2 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{n+i}$.

解 $\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{n+i}=\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\dfrac{1}{n}$，作 T 分割，且 $T=\max\{\Delta x_i \mid i=1,2,\cdots,n\}=\dfrac{1}{n}$，$\xi_i=\dfrac{i}{n}\in\left[\dfrac{i-1}{n},\dfrac{i}{n}\right]$，则

$$\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2\,.$$

7.4 定积分中的换元法和分部积分法

牛顿－莱布尼兹公式把定积分和不定积分联系起来，也把被积函数和原函数联系起来．不定积分中常使用换元法和分部积分法，定积分中也可使用这两种方法.

7.4.1 换元法

【**定理 1**】若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，且满足

$$\varphi(\alpha)=a\,,\quad \varphi(\beta)=b\,,\quad a\leqslant\varphi(t)\leqslant b\,,\quad t\in[\alpha,\beta]\,,$$

则有定积分换元公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\,.$$

证明 由于 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 以及 $\varphi'(x)$ 都是连续函数，所以存在原函数 $F(x)=F(\varphi(t))$，由复合函数微分法有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t))=F'(\varphi(t))\varphi(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\,,$$

由此可见 $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数，由牛顿－莱布尼兹公式得

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

注：不定积分的目的是求原函数，所以做换元法时必须用新变量表示出换元过程，最后用原变量表示原函数．而定积分结果是一个数，整个计算过程和变量名无关.

7.4.2 分部积分法

【**定理 2**】若 $\mu(x)$ 和 $\nu(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、可微，则

$$\int_a^b \mu(x)\nu'(x)\mathrm{d}x=\mu(x)\nu(x)\Big|_a^b-\int_a^b \nu(x)\mu'(x)\mathrm{d}x\,.$$

证明 $(\mu\nu)'=\mu'\nu+\mu\nu'$，也就是说 $\mu\nu$ 是 $\mu'\nu+\mu\nu'$ 的一个原函数，所以有

$$\int_a^b \mu(x)\nu'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b \mu'(x)\nu(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\big(\mu(x)\nu'(x)+\mu'(x)\nu(x)\big)\mathrm{d}x=\mu(x)\nu(x)\Big|_a^b\,.$$

移项得

$$\int_a^b \mu(x)\nu'(x)\mathrm{d}x=\mu(x)\nu(x)\Big|_a^b-\int_a^b \mu'(x)\nu(x)\mathrm{d}x\,.$$

上式可改写成

$$\int_a^b \mu(x)\nu'(x)\mathrm{d}x=\mu(x)\nu(x)\Big|_a^b-\int_a^b \nu(x)\mathrm{d}\mu(x)\,.$$

例 1 计算积分 $H_m=\int_0^1 x^k \ln^m x\mathrm{d}x$.

解 $H_m=\int_0^1 x^k \ln^m x\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln^m x\Big|_0^1-\frac{m}{k+1}\int x^k \ln^{m-1} x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{m}{k+1}\int x^k \ln^{m-1} x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{m}{k+1}H_{m-1}\,.$$

$$H_0=\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{K+1}\,;$$

$$H_1=\frac{1}{K+1}H_0=\frac{-1}{(K+1)^2}\,;$$

$$H_2=\frac{2}{(K+1)^3}\,;$$

…

$$H_m=\frac{(-1)^m m!}{\left(K+1\right)^{m+1}}\,.$$

例 2 计算积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.

解 作变换 $x=a\tan t$ ， $x=0$ ， $t=0$ ， $x=a$ ， $t=\frac{\pi}{4}$ ， $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\int_0^a \frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2a^2}.$$

例 3 设 m 为正整数，计算

（1） $J_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\mathrm{d}x$.

（2） $\overline{J_m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\mathrm{d}x$.

解　$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^{m-1} x)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -\sin^{m-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}(x)(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}(x) - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x .$$

即

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m$$

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$$

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

由此可得

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 4\cdot 2} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

令 $x = \frac{\pi}{2} - t$，

$$\overline{J_m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x = J_m .$$

由 J_{2n} 可得

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\frac{1}{2m+1} = \frac{\pi}{2} .$$

证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\mathrm{d}x$，即

$$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} < \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!},$$

$$A_m = \left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m} = B_m ,$$

$$0 < B_m - A_m = \left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2m(2m+1)} < \frac{1}{2m}\cdot\frac{\pi}{2} \to 0 \quad (m\to\infty),$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}(B_m - A_m) = 0 .$$

$$\lim_{m\to\infty}(B_m - \frac{\pi}{2}) = 0 .$$

$$\lim_{m\to\infty} B_m = \lim_{m\to\infty} A_m = \frac{\pi}{2} .$$

例 4 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $x = \tan t$ ，$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ ，$x = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ，$x = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$ ，故

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos t + \sin t}{\cos t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\mathrm{d}t .
\end{aligned}$$

令 $\varphi = \frac{\pi}{4} - t$ ，$\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}t$ ，

$$t = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varphi = 0 ,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\mathrm{d}t &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\varphi\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

所以，原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sqrt{2}t\mathrm{d}t = (\ln\sqrt{2})\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

7.4.3 定积分的注意事项

作不定积分时默认被积函数是有意义的，原函数也是有意义的，因为不定积分的宗旨就是求所有原函数．定积分时，积分区间是确定的，原函数必须在整个积分区间有意义，否则积分无意义．

例 5　计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解　现用不定积分法找 $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 的原函数.

$$\begin{aligned}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \int\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)\\ &= \int\frac{1}{2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})\right)+C.\end{aligned}$$

直接利用牛顿—莱布尼兹公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 0\ .$$

显然，这个结果是错误的，因为当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\frac{1+x^2}{1+x^4}\geqslant 1$，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x \geqslant \int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x = 2\ .$$

出错原因是 $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$ 在 $[-1,1]$ 上不连续，不能使用牛顿—莱布尼兹公式.

前面的定理只是说闭区间上的连续函数可积，原函数存在，但原函数是什么？怎么找？须根据情况实际计算.

对于 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(x-\frac{1}{x}\right)$，有

$$F(0_{-}) = \lim_{x\to 0_{-}}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ ,$$

$$F(0_+) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} .$$

实际上，绝大多数定积分用牛顿－莱布尼兹公式加上换元法和分部积分法是找不到原函数的，而定积分的实用价值远大于不定积分的实用价值，因此人们只好借助于数值算法了.

7.5 变限积分和微积分学基本定理

当积分的上限或下限不是常量而是变量时称为变限积分.

7.5.1 变限积分

【定义 1】设 f 在 $[a,b]$ 上可积，对于任何 $x\in[a,b]$， f 在 $[a,b]$ 上也可积，则

（1） $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$， $x\in[a,b]$

定义了一个以变量 x 为上限的函数，我们称（1）为变上限积分.

类似地，还可定义变下限积分：

（2） $\psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$， $x\in[a,b]$.

φ 和 ψ 统称为变限积分，对于（1）和（2），为了避免被积函数中变量和变限积分中的变量混淆，最好被积函数的自变量不用变限中所用的变量.

【定理 1】若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则由（1）所定义的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证明 对 $[a,b]$ 上任一确定的点 x，只要 $x+\Delta x\in[a,b]$，按定义（1）有

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \int_a^{x+\Delta x} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^x f(t)\mathrm{d}x \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因 f 在 $[a,b]$ 上可积，所以 f 在 $[a,b]$ 上有界，令 $|f(t)|\leqslant M$， $t\in[a,b]$，于是当 $\Delta x>0$ 时有

$$|\Delta\varphi| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+\Delta x}|f(x)|\mathrm{d}t \leqslant M\Delta x .$$

当 $\Delta x<0$ 时则有 $|\Delta\varphi|\leqslant M|\Delta x|$，由此得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi = 0 .$$

由此证得 φ 在点 x 连续，由 x 的任意性知， φ 在 $[a,b]$ 上处处连续.

7.5.2 原函数的存在性定理

【定理 2】若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则由（1）所定义的函数 φ 在 $[a,b]$ 上处处可导，且

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)，\quad x\in[a,b] .$$

证明　设 x 是 $[a,b]$ 上任一确定的点，当 $\Delta x \neq 0$ 且 $x+\Delta x \in [a,b]$ 时，按定义中（1）及积分第一中值定理有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(x+\theta\Delta x)}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} 1\mathrm{d}t \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1 .\end{aligned}$$

由于 f 在点 x 连续，故有

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x) .$$

由 x 在 $[a,b]$ 上的任意性，证得 φ 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

本定理揭示了导数和定积分之间的内在联系，同时也证明了连续函数必有原函数并以积分形式给出了一个原函数．因而这一定理也称为原函数存在性定理．因该定理在整个微积分学上意义重大，故也称为微积分学基本定理.

因 f 的任意两个原函数之差为一常数，所以当 f 为连续函数时，它的任一原函数 $F(x)$ 满足

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}x + C .$$

若在此式中令 $x=a$，

$$F(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t + C = C ,$$

即

$$C = F(a) ,$$

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a) .$$

再令 $x=b$，即得到

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) .$$

这正是牛顿－莱布尼兹公式.

定理 2 可推广为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x)\mathrm{d}x = f[y_2(x)]y_2'(x) - f[y_1(x)]y_1'(x) .$$

证明略.

由上面的推广可直接得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\cos x}^{\sin x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\sin^2 x}\cos x + \mathrm{e}^{-\cos^2 x}\sin x .$$

定理 2 还可结合洛必达法则求极限.

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(1-\cos t)\mathrm{d}t}{x^3}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x(1-\cos t)\mathrm{d}t}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}.$

7.6 反常积分

积分分为正常积分和反常积分. 正常积分是指积分区间 $[a,b]$ 有穷、被积函数有界的积分，反常积分是积分区间无穷或者被积函数无界的积分．当然，积分区间无穷、被积函数也无界的积分也是反常积分.

7.6.1 问题提出

先看下面两个例子.

例 1 如图 7-3 所示，在地球表面垂直发射火箭，要使火箭克服地球引力离开地球（不考虑空气阻力），试问速度 v_0 应至少该多大?

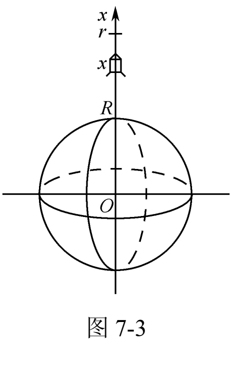

图 7-3

解 设地球半径为 R，火箭质量为 m，重力加速度为 g，火箭脱离地球引力是指火箭距地心距离为无穷远.

火箭所受地球引力为 $F=\dfrac{mgR^2}{x^2}$，x 是火箭离地心距离.

火箭从地面到离地心 r 处克服地球引力所作的功为

$$W_1=\int_R^r\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right),$$

当 $r\to\infty$ 时脱离地球引力，

$$\lim_{r\to\infty}W_1=\lim_{r\to\infty}mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)=mgR\,.$$

初速度为 v_0 的火箭所具有的动能为 $W_2=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2$，

当 $W_2\geqslant W_1$ 时，有 $v_0\geqslant\sqrt{2gR}\approx 11200\ \mathrm{m/s}=11.2\ \mathrm{km/s}$

式中，g 取 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，地球半径取 $R=6400000\ \mathrm{m}$，常称 $11200\ \mathrm{m/s}$ 为第二宇宙速度.

例 2　圆柱形桶的内壁高度为 h，内半径为 R，桶底有一半径为 r 的小孔（见图 7-4）. 试问从盛满水开始，打开小孔至流完水共需多少时间?

解　设液体的密度为 ρ，当液面高度为 x 时液体流速为 v，液体的动能为

$$E_v=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho\pi R^2(h-x)v^2 .$$

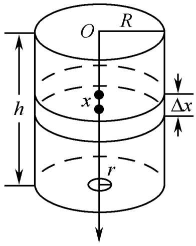

图 7-4

令桶底（$x=h$）的液体势能为 0. 液面高度为 x 处，$\mathrm{d}x$ 薄层的势能为

$$\rho\pi R^2 g(h-x)\mathrm{d}x .$$

桶内液体总势能为

$$E=\frac{1}{2}\rho\pi R^2 g(h-x)^2 .$$

当然，总势能也可通过积分

$$E=\int_x^h \rho\pi R^2 g(h-x)\mathrm{d}x$$

算出.

设液体与桶面及小孔壁无摩擦，由机械能守恒原理有

$$E_v=\frac{1}{2}\rho\pi R^2(h-x)v^2=\frac{1}{2}\rho\pi R^2(h-x)^2=E ,$$

得

$$v=\sqrt{g(h-x)} .$$

液面变化和时间变化之间的关系为

$$\rho\pi r^2 v\mathrm{d}t=\rho\pi R^2\mathrm{d}x ,$$

$$T=\int_0^T \mathrm{d}t=\int_0^h\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{g(h-x)}}$$

上式中，当 $x=h$ 时，被积函数无界，而

$$\begin{aligned}T&=\lim_{x\to h}\int_0^h\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{h-x}}\\&=\lim_{x\to h}\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{2}{\sqrt{g}}\sqrt{h-x}\Big|_h^0\\&=\frac{2R^2}{r^2\sqrt{gh}}.\end{aligned}$$

7.6.2 区间无限（穷）的反常积分定义

反常积分有两种类型，其一是积分区间无限.

【定义 1】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，如果极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的**反常积分**，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x .$$

这时也称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．反常积分发散结果无意义.

类似地，设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上连续，如果极限

$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上的**反常积分**，记为 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$．同样，也称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

当函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续时，如果

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{u\to-\infty}\int_u^0 f(x)\mathrm{d}x+\lim_{u\to+\infty}\int_0^u f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

此时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述积分统称为区间无限的反常积分，或者干脆称为无限积分或无穷积分．若区间无限的反常积分收敛，则可用牛顿－莱布尼兹公式计算定积分值，也可利用分部积分法和换元法：

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)\,;$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)\,;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to\infty}F(x)\,.$$

例 3 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x-\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$.

例 4　计算 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln^3 x}}$.

解　这类被积函数可通过凑微分法简化被积函数.

令 $t=\ln x$，$\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}x=x\mathrm{d}t$，则

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln^3 x}}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3}}=\left.\frac{-2}{\sqrt{t}}\right|_{\ln 2}^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{\ln 2}}.$$

7.6.3　无界函数的反常积分

作定积分时，若被积函数在积分区间端点至少有一个无界，积分也称为反常积分. 由于这类点是被积函数的瑕点，故这类反常积分也称为瑕积分.

【定义 2】设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，如果极限

$$\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的**反常积分**，仍然记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x.$$

同样也称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

类似地，可定义反常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to b^-}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x.$$

对于瑕积分，当其收敛时，也要利用牛顿－莱布尼兹公式计算积分值，也可利用换元法和分部积分法.

例 5　计算 $\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解　因 $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$，所以该积分属瑕积分.

$$\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\left.\arcsin\frac{x}{a}\right|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

对于积分区间无限，有一个点是瑕点，若相应的极限都存在，仍可用上面给出的计算途径和计算公式积分.

例 6　计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$.

解 $x=0^+$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}=+\infty$，本例既是无穷积分又是瑕积分.

令 $t=\sqrt{x}$， $x=t^2$， $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$； $x\to 0^+$， $t\to 0^+$； $x\to+\infty$， $t\to+\infty$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}=\int_{0^+}^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{t^2+1}=2\arctan t\Big|_0^{+\infty}=2\times\frac{\pi}{2}-0=\pi .$$

7.6.4 无穷积分的性质与收敛判断

定积分计算本身就是一个累加和的极限计算，对于无穷积分，其收敛性取决于原函数的极限是否存在．因此可直接用柯西准则判断其收敛性，也可利用函数极限中的相关性质判断其收敛性，也就是说，无穷积分也具有函数极限的一些性质．本节只直接介绍无穷积分中的相关定理和性质，不加证明.

【定理 1】无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $G\geqslant a$，只要 $u_1,u_2>G$，便有

$$\left|\int_a^{u_2}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{u_1}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon .$$

【性质 1】若 $\int_a^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，k_1,k_2 为任意常数，则 $\int_a^{+\infty}\left[k_1f(x)+k_2f(x)\right]\mathrm{d}x$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}\left[k_1f_1(x)+k_2f_2(x)\right]\mathrm{d}x=k_1\int_a^{\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{\infty}f_2(x)\mathrm{d}x .$$

【性质 2】若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，$a<b$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_b^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

【定理 2】对于 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，其收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $G\geqslant a$，当 $u>G$ 时有

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon .$$

【性质 3】若 f 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且有 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛，且

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x .$$

判别无穷积分的收敛性还有操作性更好的方法.

【定理 3】若 $\int_a^{u}f(x)\mathrm{d}x$ 是关于上限 u 单调递增的，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：对于任意确定的 u，$\int_a^{u}|f(x)|\mathrm{d}x$ 有上界.

定理 3 所叙述的方法称为绝对收敛判别法.

【定理 4】设定义在$[a,\infty)$上的两个函数 f 和 g 都在有限区间$[a,u]$上可积，且满足

$$|f(x)| \leqslant g(x), \qquad x \in [a,+\infty)$$

则当 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 必收敛，当 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散时， $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 也发散．这一法则称为比较法则.

例 7　讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解　$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$， $x \in [0,+\infty)$，以及 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

根据比较法则， $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

【推论 1】若 f 和 g 在任何$[a,u]$上可积， $g(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = c$，则有

（1）当 $0<c<+\infty$ 时， $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同收敛或同发散；

（2）当 $c=0$ 时， $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；

（3）当 $c=+\infty$ 时， $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

【推论 2】设 f 定义于$[a,\infty)$ $(a>0)$，且在任何有限区间$[a,u]$上可积，则有

（1）当 x 充分大时$|f(x)| \leqslant \frac{1}{x^p}$， $x \in [a,+\infty)$，且 $p>1$ 时 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；

（2）当$|f(x)| \geqslant \frac{1}{x^p}$， $x \in [a,+\infty)$，且 $p \leqslant 1$ 时 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

【推论 3】设 f 定义于$[a,+\infty)$，在任何有限区间$[a,u]$上可积，且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p |f(x)| = \lambda,$$

则有

（1）当 $p>1$， $0 \leqslant \lambda < +\infty$ 时 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛；

（2）当 $p \leqslant 1$， $0 \leqslant \lambda < +\infty$ 时 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 发散.

推论 2 和推论 3 称为柯西判别法.

例 8　讨论下列无穷限积分的收敛性：

（1） $\int_1^{+\infty} x^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

（2） $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}$.

解 本例中两个被积函数都非负，但

$$\lim_{x\to+\infty} x^k x^a \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^{(k+a)}/\mathrm{e}^x = 0 \qquad （k\text{ 为任何正数}）$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} = 1 \qquad (k=\frac{1}{2})$$

所以（1）收敛,（2）发散.

除了以上判别收敛和发散的判别法之外，还有狄利克雷判别法和阿贝尔判别法，这两个判别法用于判别乘积函数为被积函数的无穷积分.

【定理 5】若 $F(u)=\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上当 $x\to\infty$ 时，单调趋于 0，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

上面的判别法称为狄利克雷判别法.

【定理 6】若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上单调有界，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

例 9 判断 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p}$，

当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 是收敛的，此时 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$ 是绝对收敛的.

当 $p<1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散.

7.7 定积分算法小结

牛顿－莱布尼兹公式把定积分和不定积分紧密地联系起来，不定积分中所有算法和技巧都可用于定积分．由于不定积分是找出被积函数的所有原函数，而定积分是计算原函数在两点之差，所以在用换元法和分部积分法作定积分时不必考虑变量名，计算值时也不必代回原始变量再计算，而且可利用被积函数的奇偶性，简化计算过程．不定积分是在被积函数的定义域中进行的，并默认原函数有意义，但定积分必须考虑这一点.

7.7.1 分部积分法算例小结

在不定积分中，我们介绍了使用分部积分法的必要条件和三个充分条件，为了避免重复，

这里不再对三类再分子类一一例举，也不给出通用计算公式和计算过程.

例 1　计算 $\int_0^1 x^3 e^{3x} dx$.

解

$$\int_0^1 x^3 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^3 e^{3x}\Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 e^{3x} dx$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}x^2 e^{3x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{3} x e^{3x} dx$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}e^3 + \frac{2}{9} x e^{3x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{9} e^{3x} dx$$

$$= \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}e^{3x}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{9}e^3 - \frac{2}{27}e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27} .$$

例 2　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx$.

解

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{2x} \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{\pi} - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} e^{2x} \sin x dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}I ,$$

所以

$$I = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{5}e^{\pi} + \frac{1}{5}.$$

7.7.2　综合算法

本节不单独介绍换元法，重点介绍综合算法，而且也不一个子类一个子类介绍，逐一介绍留在数学实验中.

1．通过换元法或恒等变换将被积函数转换成不定积分中满足分部积分法的某一充分条件的子类.

例 3　计算 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(\ln x) dx$.

解　本例属于分部积分法中满足充分条件二的积分.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x = x\cos(\ln x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{3}\cos\left(\ln\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\cos\left(\ln\frac{\pi}{4}\right)+x\sin(\ln x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{3}\cos\left(\ln\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\cos\left(\ln\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\sin\left(\ln\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\sin\left(\ln\frac{\pi}{4}\right)-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}\cos\left(\ln\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{8}\cos\left(\ln\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\sin\left(\ln\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{8}\sin\left(\ln\frac{\pi}{4}\right).$$

例 4　计算 $\int_0^1 y^5\sin y^3\mathrm{d}y$.

解　令 $y^3=x$ ， $\mathrm{d}x=3y^2\mathrm{d}y$ ，则

$$\int_0^1 y^5\sin y^3\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{3}x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}x\cos x\Big|_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1\cos x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\cos 1+\frac{1}{3}\sin x\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{3}\cos 1+\frac{1}{3}\sin 1$$

$$=\frac{1}{3}(\sin 1-\cos 1).$$

例 5　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\cos x\mathrm{d}x$.

解　原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}x\sin 2x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{4}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

2．当被积函数为两个（或多个）函数的乘积时，能凑微分则先用第一换元法．

例 6　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x e^{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \cos x e^{\cos x} dx$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x e^{\cos x} d\cos x$$
$$= -\int_1^0 2ye^y dy = \int_0^1 2ye^y dy$$
$$= 2ye^y\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^y dy$$
$$= 2.$$

7.7.3　某些数列的极限计算

对于某些累加和计算，若能将其转换成黎曼和，则可利用定积分公式计算其极限．将一般累加和转换成黎曼和的关键在于：

（1）取出数列通项，将通项 a_i 通过恒等变换转换成

$$f(\xi_i)\Delta x_i,$$

式中 $\Delta x_i = \dfrac{a}{n^k} = \Delta x$，通常取 $a=1$，$k>0$，ξ_i 取值随题目不同而不同，显然须满足

$$\lim_{n\to\infty} \Delta x_i = 0.$$

（2）变一般和为黎曼和：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

（3）按定义将黎曼和转换成定积分，下限取 x_1，上限取 x_n．

例 7　计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2-i^2}}$.

解　$\dfrac{1}{\sqrt{n^2-i^2}} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$，取 $x_i = \xi_i = \dfrac{i}{n}$，$\Delta x_i = \dfrac{1}{n} = \Delta x$，$f(\xi_i) = f(x_i) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x_i^2}}$，由此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-i^2}} = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}} = \lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{\sqrt{1-x_i^2}},$$

取 $x_1 = \dfrac{1}{n}\to 0$，$x_n = \dfrac{n}{n} = 1$，有

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{\sqrt{1-x_i^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

例 8　计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^3}{n^4}$.

解　$\dfrac{i^3}{n^4}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^3$，取 $\Delta x_i=\Delta x=\dfrac{1}{n}$，$\xi_i=\dfrac{i}{n}$，$f(\xi_i)=\xi_i^3=\left(\dfrac{i}{n}\right)^3$. 变一般累加和为黎曼和：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3.$$

按定义将黎曼和转换成定积分，定积分下限为 0，上限为 1：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$$

思　考　题

1．黎曼和是怎样形成的？有什么特点？试与学过的函数极限加以比较.

2．下面的极限是否是定积分？设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，把 $[a,b]$ 任意分为 n 份，在每份任取点 ξ_i，构成一个和并取其极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

3．如下定积分的存在及其数值应取决于哪些因素？为什么？

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

4．既然一个可变上限的定积分是被积函数的原函数，能否说定积分与原函数的概念是相同的？

5．哪一类函数必有原函数？为什么？

6．使用牛顿－莱布尼兹公式时需要具备什么条件？

7．使用定积分换元公式需要注意什么？

8．各个近似计算法的基本精神是什么？

习　　题

1．图 7-5 和图 7-6 是由 $y=2x$，$x=4$，$x=6$ 所围成的，将区间 $[4,6]$ 分成 n 等份，作 n 阶阶梯图形，试求内接 n 阶形和外接 n 阶形面积，并证明当 $n\to\infty$ 时，两者极限都为图形的面积.

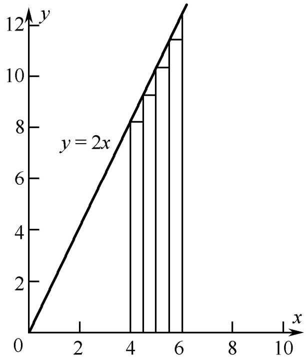

图 7-5

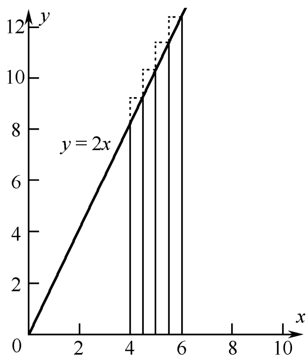

图 7-6

2．已知质点的运动速度 $v=2t-4$ （cm/s），试求出质点在前 10 秒内所走过的路程．

3．用直接求积分和的极限计算下列积分：

（1） $\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$　　（2） $\int_0^1 x\mathrm{d}x$　　（3） $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$

4．下列积分哪个较大？

（1） $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$　　（2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x$

5．若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增，证明

$$(b-a)f(a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f(b) .$$

6．确定下列积分的符号：

（1） $\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$　　（2） $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

（3） $\int_{-2}^3 x^3 2^x \mathrm{d}x$　　（4） $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x\mathrm{d}x$

7．利用积分中值定理，估计积分：

（1） $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+0.5\cos x}$　　（2） $\int_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x$

8．求下列函数的微商：

（1） $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$　　（2） $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$

（3） $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}t$

9．用洛必达法则求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t}{x}$　　（2） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x (\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$

10．下列积分能否运用积分基本公式？

（1） $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$　　（2） $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x$

（3）$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

11．利用定积分求下列和的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

12．直接利用牛顿－莱布尼兹公式计算下列积分：

（1）$\int_0^x \sin t\mathrm{d}t$　　（2）$\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x$

（3）$\int_2^{-1}\frac{1}{(11+5x)^3}\mathrm{d}x$　　（4）$\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x-2}$

（5）$\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$　　（6）$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\mathrm{d}x$

13．若 m，n 都为正整数，证明

（1）$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\mathrm{d}x=0$

（2）$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \pi & m=n\end{cases}$

计算下列积分：

14．$\int_0^x xe^x\mathrm{d}x$　　15．$\int_a^{\pi}x^2\sin x\mathrm{d}x$

16．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin x\mathrm{d}x$　　17．$\int_a^x \ln(t+\sqrt{t^2+a^2})\mathrm{d}t$

18．$\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$　　19．$\int_1^{e}\ln^3 x\mathrm{d}x$

20．利用 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$，$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ 递推公式计算：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\mathrm{d}x$　　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x$　　（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{11} x\mathrm{d}x$

计算下列积分：

21．$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$　　22．$\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$

23．$\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\mathrm{d}x$　　24．$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^7 2x\mathrm{d}x$

25．$I_n=\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x$　　26．$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

27．$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　28．$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta$

29．证明 $\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$．

30．引入新变量 $t=x+\frac{1}{x}$ 计算积分

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x\ .$$

31．求下列有界间断函数的积分.

（1）$\int_{-2}^{2}\operatorname{sgn}x\mathrm{d}x$

（2）$\int_{0}^{x}f(x)\mathrm{d}x$，$f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant l\\ 0 & |x|>l\end{cases}$

（3）$\int_{0}^{x}[x]\mathrm{d}x$

（4）$\int_{0}^{3}\operatorname{sgn}(x-x^3)\mathrm{d}x$

（5）$\int_{0}^{6}[x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x$

计算下列定积分：

32．$\int_{0}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$

33．$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$

34．$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2x}$

35．$\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$

36．$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)^2\mathrm{d}x$

37．$\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4x+\cos^4x}$

第 8 章　定积分应用

不少几何、物理和力学问题最后要归结到求黎曼和的极限计算，也就是说要归结于定积分计算．如何把各个具体问题转换为黎曼和极限计算是本章的重点．

8.1　定积分在几何上的应用

8.1.1　计算平面图形面积

在引入定积分时，我们介绍了 $y=f(x)$，$y=0$，$x=a$ 及 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积：

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{，}\quad f(x)>0\ .$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不全大于 0 时（见图 8-1），显然图形的面积可用公式

$$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \tag{1-1}$$

计算．

对于由 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，$x=a$ 及 $x=b$ 所围成的图形（见图 8-2），图形的面积计算公式为

$$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))\mathrm{d}x \tag{1-2}$$

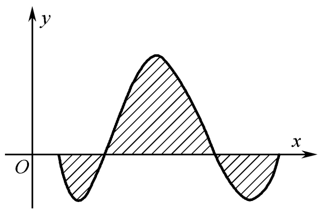

图 8-1

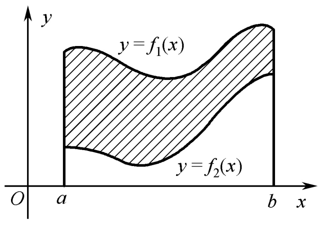

图 8-2

式（1-2）正确的前提是 $f_1(x)>f_2(x)$．

对于两条以上相交曲线所围成的图形的面积，则须算交点确定端点，将整个图形分成若干段，使每段由上下两个函数组成，这时就可以使用式（1-2）计算各段的面积．

例 1　计算 $y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$ 和 $y=0$ 所围成图形的面积．

解　对于 $y=\sin x$，当 $x\in[0,\pi]$ 时 $y\geqslant 0$，而 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $y<0$，由于 $\sin 0=\sin 2\pi=0$，

因此取 $a=0$，$b=2\pi$，可直接用式（1-1）计算所围成的面积：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x\\ &=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\\ &=2+2=4.\end{aligned}$$

例 2　计算 $y_1=\sin x+2$，$y_2=\cos x-1$ 与直线 $y=0$，$x=0$ 及 $x=2\pi$ 所围成的面积.

解　在区间 $[0,2\pi]$ 上，$y_1>y_2$，所以可直接用公式（1-2）计算面积：

$$\int_0^{2\pi}(\sin x+2)\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}(\cos x-1)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}3\mathrm{d}x-\cos x\Big|_0^{2\pi}-\sin x\Big|_0^{2\pi}=6\pi\ .$$

例 3　如图 8-3 所示，计算函数 $y^2=x$ 与直线 $x-2y-3=0$ 所围成的平面图形的面积.

解　解方程组 $\begin{cases}y^2=x\\ x-2y-3=0\end{cases}$，得两曲线的交点为(1，−1）和(9，3)，由于 $y^2=x$，所以 $x\geqslant 0$，在 $[0,1]$ 上有两个子函数 $y=\pm\sqrt{x}$，在 $[1,9]$ 上，上面的函数为 $y=\sqrt{x}$，下面的函数为 $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{2}$，所以面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\sqrt{x}dx-\int_0^1(-\sqrt{x})\mathrm{d}x+\int_1^9\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_1^9\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 2\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^9\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_1^9\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9-\frac{x^2}{4}\Big|_1^9+\frac{3}{2}x\Big|_1^9\\ &=\frac{4}{3}+18-\frac{2}{3}-20+12=\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

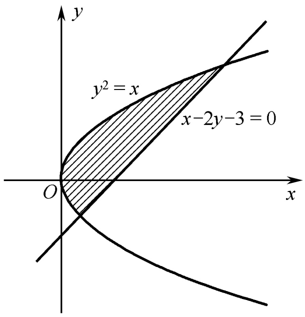

图 8-3

8.1.2　计算用参数方程描述的曲线所围的面积

曲线 C 的参数方程是指

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in[\alpha,\beta].$$

记 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\psi(\beta)$，若 $x=\varphi(t)$ 连续可微，则曲线 C 与直线 $x=a$，$y=b$ 及 $y=0$ 所围成的图形的面积计算公式为

$$\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{1-3}$$

例 4　如图 8-4 所示，计算摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，其中一拱与 x 轴所围平面图形的面积（$a>0$）.

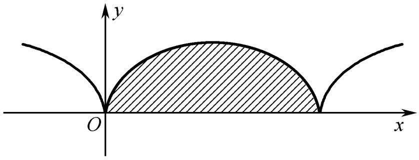

图 8-4

解 摆线的一拱所围成的面积是指摆线和 x 轴两相邻交点间曲线和 x 轴所围成的面积. 解方程

$$y = a(1-\cos t) = 0$$

得

$$t = 2i\pi，\quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

取 $i = 0$ 和 1 得

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) a(t-\sin t)' \mathrm{d}t \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \mathrm{d}t \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) \mathrm{d}t \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} \mathrm{d}t \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

注：$\int_0^{2\pi} \cos t \mathrm{d}t = 0$，$\int_0^{2\pi} \cos 2t \mathrm{d}t = 0$.

若曲线 C 本身是封闭曲线，则曲线的面积为

$$\left| \int_\alpha^\beta \psi(t) \varphi'(t) \mathrm{d}t \right|，\text{在} (\alpha, \beta) \text{内曲线不相交} \tag{1-4}$$

式（1-4）可以不必考虑由低角度到高角度（取负号）还是由高角度到低角度（取正号）.

例 5 计算椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ 中 $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{6}$ 的面积.

解 这是一个由低角度到高角度的积分.

$$\begin{aligned} A &= -\int_0^{\frac{\pi}{6}} x' y \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{6}} (-ab\sin^2 t) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} ab \frac{1-\cos 2t}{2} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}ab\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}ab\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{12}ab\pi-\frac{1}{4}ab\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{12}ab\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}ab.$$

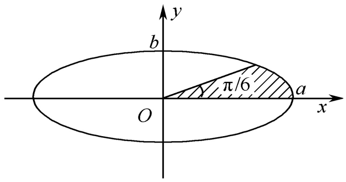

图 8-5

如图 8-5 所示，本例计算的是图中扇形部分的面积. 积分时角度由低角度到高角度，所以须在算式前加一负号.

8.1.3　计算极坐标下图形的面积

如图 8-6 所示，曲线的极坐标方程为

$$r=r(\theta)，\quad \theta\in[\alpha,\beta].$$

作分割

$$\begin{cases}T=\max\{\Delta\theta_i \mid i=1,2,\cdots,n\}\\ \Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}\end{cases}\tag{1-5}$$

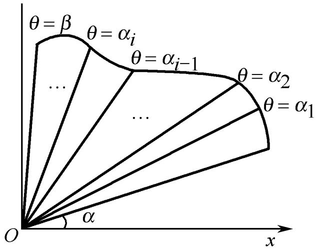

图 8-6

仿直角坐标系中黎曼和定义作极坐标的黎曼和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\sin\Delta\theta_i$，同样可定义

$$\lim_{T\to 0}\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\sin\Delta\theta_i=\lim_{T\to 0}\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta\tag{1-6}$$

$\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$ 和 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的性质和有关定理完全类似，这里不再重述和证明.

例 6　如图 8-7 所示，求四瓣玫瑰线 $\rho=a\sin 2\theta$ 的面积.

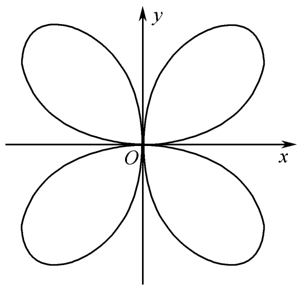

图 8-7

解　$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{1}{4}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\pi-\frac{a^2}{16}\sin 4\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\pi.$$

由图形的对称性，四瓣玫瑰线的面积也可由下式算出：

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\pi-\frac{1}{2}\sin 4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}a^2\pi.$$

8.2 曲线长度、曲率半径、柱体、锥体、旋转体体积和表面积计算

8.2.1 计算曲线长度

在计算曲边梯形面积时，我们将一个大曲边梯形分割成无穷多个细长条的小曲边梯形，用小曲边梯形的面积之和代替大曲边梯形的面积．现在要计算曲线长度，仿上面的思想，我们把曲线分割成无穷多个短线段，用这些短线段长度之和代替曲线长度．

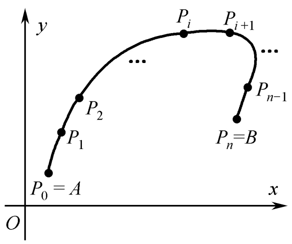

图 8-8

设平面曲线 $C=\overset{\frown}{AB}$，如图 8-8 所示．作分割 T，在曲线内插入 $n-1$ 个点，使 $A=P_0,P_1,\cdots,P_{n-1}$， $P_n=B$，且

$$\begin{cases} T=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\overline{P_{i-1}P_i} \\ L_T=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i} \end{cases}.$$

式中，$\overline{P_{i-1}P_i}$ 为近似直线段 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 的长度，L_T 为折线总长．

【定义 1】对于曲线 C 的无论怎样的分割 T，如果存在极限

$$\lim_{T\to 0}L_T=l,$$

则称曲线 C 是**可求长的**，并把极限 l 作为曲线 C 的**长度**．

由于点 P_i 的坐标为 $(x_i,f(x_i))$，因此，相邻两点间的距离为

$$\overline{P_{i-1}P_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}.$$

整个折线的长度为

$$L_T=\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} \tag{2-1}$$

这是一个和，但不是黎曼和．

若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续微商 $f'(x)$，根据拉格朗日中值定理有

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})，\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

所以上面的式（2-1）可转换成

$$L_T=\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i \tag{2-2}$$

当 $y=f(x)$ 连续可微时，按定积分的定义有，曲线 C 长度的计算公式和计算过程为

（1）作分割 $T=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\overline{P_{i-1}P_i}\}$， $P_0=A$， $P_n=B$， T 对应分割 $T'=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\Delta x_i|=|x_i-x_{i-1}|\}$；

（2）作黎曼和并取极限

$$l=\lim_{T'\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x \tag{2-3}$$

若曲线由参数方程 $x=\varphi(t)$， $y=\psi(t)$， $t\in[\alpha,\beta]$ 确定，则计算公式为

$$\begin{cases}l=\lim\limits_{T'\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(\phi'(\xi_i))^2+(\psi'(\xi_i))^2}\Delta t_i=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\mathrm{d}t\\ T'=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i,\quad \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta\end{cases} \tag{2-4}$$

例 1　求抛物线 $y=x^2$ 在点 $O(0,0)$ 到点 $A(a,a^2)$ 间的弧长.

解　$l=\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^a\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^{2a}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$.

令 $t=\sinh x$， $\mathrm{d}t=\cosh x\mathrm{d}x$， $t=0\Leftrightarrow x=0$， $t=2a$， $x=\sinh^{-1}2a$，所以

$$\begin{aligned}上式&=\frac{1}{2}\int_0^{\sinh^{-1}2a}\cosh^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\sinh^{-1}2a}\frac{1+\cosh 2x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\sinh^{-1}(2a)+\frac{1}{8}\sinh(2x)\Big|_0^{\sinh(2a)}\\&=\frac{1}{4}\sinh^{-1}(2a)+\frac{1}{8}\sinh(2\sinh^{-1}(2a)).\end{aligned}$$

注意：上面积分中的 x 只是一变量名，它和笛卡儿坐标中的 x 已无关系.

例 2　计算摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 一拱长度.

解　摆线一拱的取值范围为 $0\sim 2\pi$.

$$\begin{aligned}l&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a\,.$$

将式（2-4）中的上限变成变量t，则得到解决曲线由A到某一动点的弧长计算公式：

$$l(t)=\int_0^t\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t\,.$$

由于被积函数是连续的，因此

$$\frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\text{，即 }\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} \qquad \text{（2-5）}$$

我们称式（2-5）为弧微分.

8.2.2 计算曲率

曲率也是曲线局部性质之一．曲率显示了曲线的弯曲程度.

如图 8-9 所示，曲线$y=f(x)$是一条光滑曲线，A和B为曲线上的两点，φ为曲线在A，B两点的切线的夹角，S为弧AB的长度，则称

$$k=\lim_{S\to 0}\frac{\varphi}{S}$$

为曲线在A点的曲率.

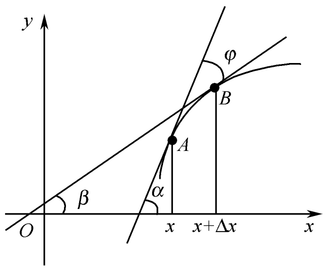

图 8-9

设过A点的切线与x轴的夹角为α，过点B的切线与x轴的夹角为β，则

$$\varphi=|\beta-\alpha|=|\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x)|\,.$$

弧AB的长度为

$$S=S(x+\Delta x)-S(x)\,.$$

弧AB的平均曲率为

$$\frac{\varphi}{S}=\frac{|\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x)|}{S(x+\Delta x)-S(x)}=\frac{|\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x)|/\Delta x}{S(x+\Delta x)-S(x)/\Delta x}\,.$$

当$S\to 0$时，$\Delta x\to 0$，分子趋于

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan f'(x+\Delta x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan f'(x)\right|$$

$$=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan f'(x)\right|$$

$$=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan y'(x)\right|$$

$$=\frac{|y''|}{1+(y')^2}\,.$$

分母趋于

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+(y')^2}\ .$$

由此得

$$k=\lim_{S\to 0}\frac{\varphi}{S}=\frac{\dfrac{|y''|}{1+(y')^2}}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{y''}{\sqrt{(1+(y')^2)^2}}\ .$$

当曲线用参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 给出时，计算公式为

$$k=\frac{x'y''-x''y'}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}}\ .$$

知道一点的曲率，自然知道该点的曲率半径

$$r=\frac{1}{k}\ .$$

8.2.3　利用断面面积作体积计算

当垂直于某个方向有无限多个截面面积且可用初等数学方法计算出面积时，可通过定积分计算出物体的体积.

如图 8-10 所示，设断面垂直于 x 轴，断面面积是 x 的函数，记为 $S(x)$． $S(x)$ 可用初等数学方法算出．设 a 和 b 分别是两端断面的 x 坐标值，作分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，令

$$T=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\Delta x_i|=|x_i-x_{i-1}|\},$$

夹在平面 a 与 b 之间的立体为 Δv_i，当 $T\to 0$ 时，由微分中值定理有 $\Delta v_i=S(\xi_i)\Delta x_i$，由此有

$$V\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i=\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

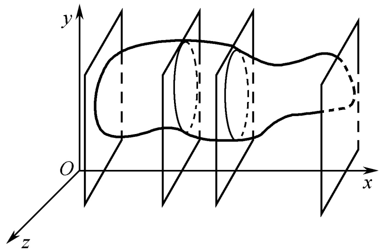

图 8-10

对上式两端取极限得

$$V=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x\ .$$

特别地，若立体是由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形，则绕 x 轴旋转一圈而成的旋转体体积为

$$V_x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\ .$$

同理，曲线 $x=\varphi(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 绕 y 轴旋转所围成的立体体积为

$$V_y=\int_c^d S(y)\mathrm{d}y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y\ .$$

例 3 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴旋转 2π 所得旋转体的体积.

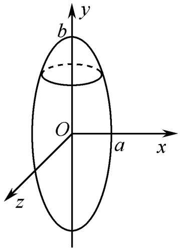

图 8-11

解 椭圆旋转后成为旋转椭球，如图 8-11 所示.

$$V=\pi\int_{-b}^{b}x^2\mathrm{d}y=\pi\int_{-b}^{b}\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi a^2 b .$$

8.2.4 旋转体侧面积

如图 8-12 所示，母线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转，形成圆锥台.

作分割 T 分割区间 $[a,b]$：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b .$$

给定曲线被点 $M_i(x_i,f(x_i))$ 分成了 n 部分，当分割充分细时，可认为 $M_{i-1}M_i$ 是直线段，线段 $M_{i-1}M_i$ 绕 x 轴旋转形成一个圆台，母线长为

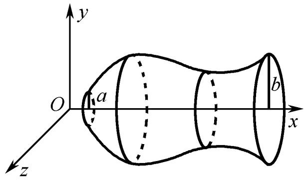

图 8-12

$$\overline{M_{i-1}M_i}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} .$$

其侧面积为

$$\Delta p=\pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} ,$$

整个旋转体的侧面积为

$$P=\lim_{T\to 0}\Delta p=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2} .$$

当 $\max(x_i-x_{i-1})$ 充分小时， $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$.

$$\begin{aligned}P&=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}\\&=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i\\&=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}2\pi f(\eta_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i\\&=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 4 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周后的旋转体的表面积.

解 摆线绕 x 轴旋转后的旋转体的表面积为

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\mathrm{d}u$$

$$=16\pi a^2\int_{-1}^{1}(1-\theta^2)\mathrm{d}\theta=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

8.2.5　定积分在力学、物理上的应用

1.（曲）线状物体的质心计算

对于均匀密度的线状物体，若是直线，则重心在中点，若是光滑曲线，则计算过程如下：

（1）作分割 $T=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$， $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，设物体的密度为 ρ，令 Δx_i 所对应的弧长为 ΔS_i，则

$$\Delta S_i=\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i,\quad \xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

（2）计算公式

物体总质量计算公式为

$$m=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho\Delta S_i=\lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i=\int_a^b\rho\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

曲线状物体质心计算公式为

$$x_G\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho x_i\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i}{m},\quad y_G\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\rho y_i\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i}{m}.$$

将 $m=\int_a^b\rho\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$ 代入上式并取极限得

$$x_G=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x}{\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x},\quad y_G=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x}{\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x}.$$

若曲线是用参数方程表示的，则计算公式为

$$m=\int_\alpha^\beta\rho\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta\rho\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t,$$

$$x_G=\int_\alpha^\beta\rho x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t,$$

$$y_G=\int_\alpha^\beta\rho y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

上面的公式也适用于变密度物体的质心计算，只须将常数 ρ 改成 $\rho(x,f(x))$ 即可.

例 5　计算等密度半圆弧 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ 的重心.

解 设圆的密度为 ρ ，半圆弧总质量为 $\pi\rho a$ ，由对称性可直接得到质心为

$$x_G = 0 \text{，} \quad y_G = \frac{1}{a\pi}\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a\pi}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi}.$$

2．转动惯量计算

力学中惯量有质量和转动惯量．质量是常量，转动惯量和转轴位置有关，不是常量，不过只要转轴位置确定，则转动惯量就是常量了，对于众多器件而言，转轴位置是不变的，因而作为惯量也是有意义的．设质点质量为 m ，与转轴距离为 r ，则转动惯量为 mr^2 ．对于密度均匀的（曲）线状物体，转动惯量的计算过程和计算公式如下（为方便起见，不妨设物体是一条光滑曲线且绕 x 轴旋转，另设物体起止点 x 坐标分别为 a 和 b ）.

（1）作分割 $T = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$ ， $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

（2）计算公式

$$I \approx \sum_{i=1}^{n}\rho\Delta S_i y_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\rho y_i^2\Delta S_i \text{ .}$$

对上式两端取极限得

$$I = \lim_{T\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho f^2(x_i)\Delta S_i = \int_a^b \rho f^2(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x \text{ .}$$

例 6 求密度为 ρ 的半圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 绕 x 轴的转动惯量.

解 $I = \int_{-a}^{a}\rho(a^2-x^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = 2\rho a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^3}{2}\rho\pi$.

3．引力计算

例 7 如图 8-13 所示，原点放一质量为 m 的小球，y 轴上横放一长度为 l 、质量为 M 的均匀杆，中心在 y 轴上与小球距离为 l ，计算杆对小球的引力.

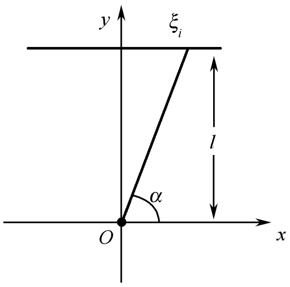

图 8-13

解 将小球视为质点，杆视为线状物体，计算过程和计算公式及结果如下：

（1）作分割 $T = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i \frac{l}{n} = h$, $x_0 = -\frac{l}{2}$, $x_n = \frac{l}{2}$, $x_i = x_0 + ih$, $i = 1,2,\cdots,n-1$.

（2）令 F_i 为 Δx_i 段小杆对小球的引力，F_{ix} 和 F_{iy} 分别为 x 方向和 y 方向的分力，Δx_i 段小杆的质量为 $\frac{M}{l}\Delta x_i$ ，按牛顿万有引力定律有

$$F_{ix} \approx k\frac{m\frac{M}{l}\Delta x_i}{\xi_i^2+l^2}\cos\alpha = \frac{kmM\xi_i\Delta x_i}{l(\xi_i^2+l^2)^{3/2}}，\quad F_{iy} \approx k\frac{m\frac{M}{l}\Delta x_i}{\xi_i^2+l^2}\sin\alpha = \frac{kmM\Delta x_i}{(\xi_i^2+l^2)^{3/2}}.$$

所以

$$F_x = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{kmM\xi_i\Delta x_i}{l(\xi_i^2+l^2)^{3/2}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{kmMx}{l(x^2+l^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = 0，$$

$$F_y = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{kmM\Delta x_i}{(\xi_i^2+l^2)^{3/2}} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{kmM}{(x^2+l^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{kmM}{(x^2+l^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$$

令 $x = l\tan t$，则 $\mathrm{d}x = \frac{l\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$，$\frac{1}{(l^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{l^3}\cos^3 t$，因 $x=0 \to t=0$；$x=\frac{l}{2}$，$t=\arctan\frac{1}{2}$，所以

$$F_y = \frac{2kmM}{l^2}\int_0^{\arctan\frac{l}{2}}\cos t\mathrm{d}t = \frac{2kmM}{l^2}\sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{kmM}{l^2}.$$

式中，k 为万有引力常数。

例 8　一圆柱形水池，半径为 5 m，高为 20 m，注满了水，求抽出池内所有水至少要做多少功？

解　如图 8-14 所示，高 x 处 $\mathrm{d}x$ 薄片的重量为 $G = \pi 5^2\mathrm{d}x$ 吨，水的比重为 1. 将该处的水抽出水池，所做功为

$$W_i = (20-x)G.$$

所以要将水全部抽出，应做功为

$$W = \int_0^{20} 25\pi(20-x)\mathrm{d}x$$

$$= 500\pi x\Big|_0^{20} - \frac{1}{2}25\pi x^2\Big|_0^{20} = 5000\pi\ (\mathrm{t}\cdot\mathrm{m}).$$

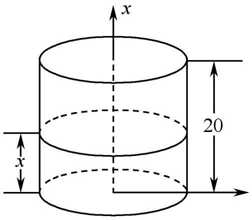

图 8-14

8.3　定积分的数值计算

虽然理论上讲，对于只有有限个间断点的有界连续函数都可积，但大多数函数的原函数却找不到．有时用不定积分方法找到了原函数，但该原函数又不是真正的原函数，而不少工程物理问题都要用到定积分．于是人们想到了用简单的、性质良好的函数代替复杂的函数作定积分计算．这里只介绍数值积分算法的牛顿算法和高斯算法两大类．牛顿法和高斯法都是以拉格朗日插值多项式代替被积函数，区别只是节点选取不同．

8.3.1 牛顿积分算法

n 阶牛顿积分公式是以 n 阶等距拉格朗日插值多项式代替被积函数所推导出的数值计算公式，公式的推导过程如下：

（1）利用 n 阶拉格朗日插值多项式 $\begin{cases} L_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}f(x_i) \\ x_i=a+ih, h=\dfrac{b-a}{n} \end{cases}$ 中的 $\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$ 计算牛顿积分公式中的第 i 个系数 A_i，且

$$A_i^{(n)}=\int_a^b\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\mathrm{d}x=\frac{b-a}{n}\int_0^n\frac{t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)}{i!(-1)^{n-i}(n-i)!}\mathrm{d}t=(b-a)C_i^{(n)},$$

$$C_i^{(n)}=\frac{(-1)^{n-i}}{n\cdot i!\cdot(n-i)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)\mathrm{d}t\ .$$

由此有

$$S_L^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}A_i^{(n)}f(x_i)=(b-a)\sum_{i=0}^{n}C_i^{(n)}f(x_i) \tag{3-1}$$

上式就是 n 阶牛顿积分计算公式，式中 $A_i^{(m)}$ 是牛顿求积系数，它与积分区间有关，而 $C_i^{(n)}$ 也是 n 阶牛顿积分公式中的第 i 个系数，该系数称为柯特斯系数．柯特斯系数与积分区间无关，与被积函数也无关．

当 $n=1$ 时，称为梯形积分公式

$$S_1=(b-a)\left[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right] \tag{3-2}$$

当 $n=2$ 时称为辛普生积分公式

$$S_2=(b-a)\left[\frac{1}{6}f(a)+\frac{2}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{6}f(b)\right] \tag{3-3}$$

辛普生积分公式也称为抛物线积分公式．

图 8-15 中阴影部分是按梯形积分公式计算得到的结果示意图，显然计算结果和理论值差异较大．实际上，梯形公式、辛普生公式实用性均很弱，工程物理计算中常使用复合（也称复化）积分公式．所谓复合积分公式，实际上就是先将积分区间划分成若干等距子区间，在各子区间上使用同一低阶积分公式，利用积分的可叠加性，用各子区间积分和作为整个积分值．下面是复合梯形积分公式和复合辛普生积分公式：

$$\begin{cases} S=(b-a)\left(\dfrac{1}{2}f(a)+\dfrac{1}{2}f(b)+\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right) \\ x_i=a+ih,h=\dfrac{b-a}{n} \end{cases} \tag{3-4}$$

$$\begin{cases} S=\dfrac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i})+2\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})\right) \\ x_i=a+ih,h=\dfrac{b-a}{2n} \end{cases} \tag{3-5}$$

图 8-16 就是 $n=4$ 时复合梯形积分公式计算的结果示意图.

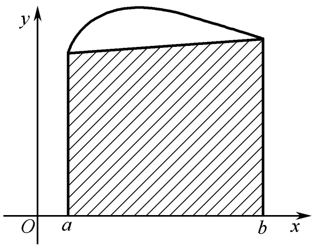

图 8-15

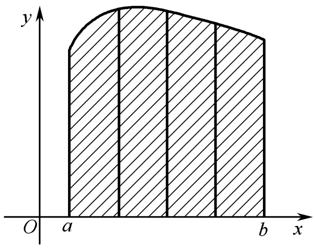

图 8-16

这里要说明的一点是，式（3-5）和一般书中的形式不同，通常书中的 $h=\dfrac{b-a}{n}$，但这样会出现半节点，对程序编写不方便，故本书采用 $h=\dfrac{b-a}{2n}$.

实际计算时很少使用高阶牛顿积分公式，因为 8 阶以上的牛顿积分公式稳定性不好（介绍略），4 阶以上的也很少用．1 到 8 阶牛顿积分的柯特斯系数表见表 8-1.

表 8-1　1 到 8 阶柯特斯系数表

n	$c_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		

（续表）

n	$c_i^{(n)}$								
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

8.3.2 代数精确度

在数值积分中特别用代数精确度来衡量积分公式逼近理论积分的精度.

【定义 1】对于某个数值积分公式，若被积函数是多项式，当多项式的阶为 m 时积分结果是理论值，当多项式的阶为 $m+1$ 时不是理论值，则此公式的代数精确度为 m .

【定理 1】 n 阶牛顿积分的代数精确度为

$$m=\begin{cases} n+1 & n\text{为偶数} \\ n & n\text{为奇数} \end{cases}.$$

证明 当 n 为奇数时，由于 $L_n(x)=f(x)$ ，当然有

$$\int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

当 n 为偶数时，通过恒等变换总可以将 n 阶 $L_n(x)$ 表达成

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x-x^*)^i \text{，} \quad x^*=x_0=\frac{b+a}{2} .$$

设 $f(x)$ 是 $n+1$ 阶多项式，同样经恒等变换使之表述成

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n+1}\beta_i(x-x^*)^i \text{，} \quad x^*=x_0=a .$$

现将 $L_n(x)$ 的节点按以下约定编号：

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{a+b}{2} \\ x_{2i-1}=x_0+ih \\ x_{2i}=x_0-ih \end{cases} \text{，} \quad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2} \text{，} \quad h=\frac{b-a}{n} .$$

由代数插值多项式的定义有

$$\begin{cases} L_n(x_0)=f(x_0) \\ L_n(x_{2i-1})=f(x_{2i-1}) \\ L_n(x_{2i})=f(x_{2i}) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \alpha_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(jh)^i=\beta_0+\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(jh)^i \\ \alpha_0+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\alpha_i(jh)^i=\beta_0+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\beta_i(jh)^i \end{cases}，\quad j=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

解之得

$$\begin{cases} \alpha_0=\beta_0 \\ \alpha_{2i}=\beta_{2i} \end{cases}，\quad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b\sum_{i=0}^{n+1}\beta_i(x-x^*)^i\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b\sum_{i=0}^{n/2}\beta_{2i}(x-x^*)^i\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b\sum_{i=0}^{n/2}\alpha_{2i}(x-x^*)^i\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

显然，当 $f(x)$ 的阶为 $n+2$ 时，偶次项系数至少不会都相等，上式不再成立. 同样，当 $L_n(x)$ 中 n 为奇数时，$f(x)$ 为 $n+1$ 次多项式时两者偶次项系数不再全等（都转换成上述形式的幂级数）. 这样就证明了定理.

8.3.3　低阶牛顿积分公式截断误差

要计算牛顿积分公式的截断误差，首先要计算代数插值多项式的截断误差.

【定理 2】 若 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 阶代数插值多项式，$f(x)$ 在插值区间至少有 $n+1$ 阶连续导数，则

$$R_n(f)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

证明　作辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-P_n(t)-\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n).$$

显然，

$$\begin{cases} \phi(x)=0 \\ \phi(x_i)=0 \end{cases}\qquad i=0,1,\cdots,n.$$

共有 $n+2$ 个 0 点.

反复利用罗尔中值定理知，存在 ξ 使得

$$f^{(n+1)}(\xi)=0,$$

代入辅助函数得

$$\phi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}(n+1)!=0\ .$$

解之得

$$R_n(f)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\ .$$

$R_n(f)$ 称为插值多项式余项.

对于带重节点的插值多项式，其插值余项和不带重节点的插值多项式类似. 所谓重节点，是指在该点上插值多项式的函数值和导数值与被逼近的函数值和导数值都相等. 若节点数为 n，有一个是重节点（设编号为 i），则插值余项为

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_i)^2(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)\ .$$

证明略.

【推论】 设 $f(x)$ 是 n 次多项式，$P_n(x)$ 是 n 次代数插值多项式，则

$$P_n(x)=f(x)\ .$$

证明 由上面的定理有

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)=0\ ,$$

所以

$$P_n(x)=f(x)\ .$$

【定理 3】 若 $f(x)$ 在积分区间至少存在二阶以上的连续导数，则梯形积分公式的截断误差为

$$-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\ .$$

证明 由插值多项式余项定理知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b L_1(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x\ .$$

由于 $(x-a)(x-b)\leqslant 0$，$x\in[a,b]$，由积分中值定理知，存在 $\eta\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\ .$$

【定理 4】 若 $f(x)$ 至少存在四阶连续导数，则辛普生公式的截断误差为

$$-\frac{f^{(4)}(\eta)}{2\ 880}(b-a)^5\ .$$

证明 取节点 $x_0=a$，$x_1=\dfrac{a+b}{2}$，$x_2=b$，作二阶等距拉格朗日插值多项式 $L_2(x)$. 同时，作带导数的三阶代数插值多项式 $P_3(x)$，使

$$P_3(x_0)=f(x_0)，\ P_3(x_1)=f(x_1)，\ P_3'(x_1)=f'(x_1)，\ P_3(x_2)=f(x_2).$$

显然，$L_2(x)$ 既是 $f(x)$ 又是 $P_3(x)$ 的代数插值多项式，由上面的定理可知 $\int_a^b L_2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b P_3(x)\mathrm{d}x$，由此有

$$\int_a^b \big(f(x)-L_2(x)\big)\mathrm{d}x=\int_a^b \big(f(x)-p_3(x)\big)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\mathrm{d}x.$$

因 $(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\leqslant 0$，由积分中值定理有，存在 η 使得

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\mathrm{d}x&=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\mathrm{d}x\\&=-\frac{f^{(4)}(\eta)}{2880}(b-a)^5.\end{aligned}$$

很容易算出复合梯形积分公式和复化辛普生积分公式的截断误差分别为 $-\frac{f''(\eta)}{12}h^2(b-a)$，$h=\frac{b-a}{n}$，$-\frac{f''(\eta)}{2880}(b-a)h^4$.

由于常用的牛顿积分公式是复合梯形公式或复合辛普生公式，所以本书不介绍一般牛顿积分公式的截断误差．一般牛顿积分公式的截断误差也不便表示，因不能用积分中值定理．

8.3.4　高斯积分

n 阶牛顿积分的代数精确度最多只为 $n+1$，能否通过节点选择提高积分的代数精确度呢？高斯解决了这一问题．

高斯积分仍然是用拉格朗日插值多项式代替被积函数的数值积分，不过所选节点为高一阶正交多项式 0 点．

1．正交多项式

【定义 2】设 $P_n(x)$ 和 $P_m(x)$ 都是多项式，$\rho(x)\geqslant 0$，若 $P_n(x)$ 和 $P_m(x)$ 分别是 n 次和 m 次多项式，且

$$\int_{-1}^1 \rho(x)P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & n\neq m\\ C>0 & n=m\end{cases},$$

则称 $P_n(x)$ 是 n 次正交多项式，$\rho(x)$ 为权函数．

随正交多项式的不同，高斯积分所选择的节点也不同，这里只介绍高斯—勒让德积分，高斯—勒让德积分中 $\rho(x)=1$．正交多项式有不少性质，这里只介绍（不证明）两个相关性质．

【性质 1】$P_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 内有 n 个不同根．

【性质 2】$P_n(x)$，$P_{n-1}(x),\cdots,P_1(x)$ 组成 n 维空间中的一个正交基．

2．高斯点和高斯系数

高斯积分的关键是确定高斯点和高斯系数．

【定义 3】若 $x\in[-1,1]$，$x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 是 $n+1$ 次勒让德多项式的 0 点，$L_n(x)$ 是以 x_i 为节点的拉格朗日插值多项式，则

$$G=\int_{-1}^{1}L_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\sum_{i=0}^{n}L_i(x)f(x_i)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\int_{-1}^{1}L_i(x)f(x_i)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}g_if(x_i)$$

称为 n 阶高斯积分，x_i 称为高斯点，g_i 称为高斯系数．

高斯—勒让德法积分的高斯点和高斯系数表，见表 8-2．

表 8-2　高斯—勒让德法积分的高斯点和高斯系数表

n	x_i	g_i
1	±0.5773503	1
2	±0.7745967	0.5555556
		0.8888889
3	±0.8611363	0.3748548
	0.3398810	0.6521452
4	±0.9061798	0.2369269
	±0.5384963	0.4786287
	0	0.5688889
5	±0.9324695142	0.1713244924
	±0.6612093865	0.3607615730
	±0.2386191861	0.4679139346
6	±0.9491079123	0.1294849662
	±0.7415311856	0.2797053915
	±0.4058451514	0.3818300505
	0	0.4179591837
7	±0.9602898565	0.1012285363
	±0.7966664774	0.2223810345
	±0.5255324099	0.3137066459
	±0.1834346425	0.3626837843

3．通用高斯积分公式

将积分区间由 $[-1,1]$ 经坐标变换转换成 $[a,b]$，前面的高斯公式就变成了通用高斯公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}f\left(\frac{b-a}{2}x+\frac{b+a}{2}\right)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}g_if\left(\frac{b-a}{2}x_i+\frac{b-a}{2}\right).$$

高斯积分公式也有复合公式（介绍略）．

说明：

（1）常用数值积分公式中还有龙贝格积分．龙贝格积分必须先用复合梯形积分公式，再用李查逊外推法，因本书不是计算方法，故本书不介绍．

（2）一般书中强调截断误差，并用截断误差表示计算精度，其实由于截断误差要估计高阶导数的最大值，对于辛普生公式为四阶，若是四阶高斯公式则为十阶（这也是本书不给出高斯积分公式截断误差的原因），显然截断误差公式有理论价值但实用价值较低，不如用代数精确度的可操作性．一般教材中没有牛顿积分的代数精确度证明，高斯积分的代数精确度的证明也较复杂，故本书给出了上述两个相关定理的新的简洁证明．

【定理 5】 n 阶高斯积分的代数精确度为 $2n+1$.

证明　设 $f(x)$ 是 $2n+1$ 阶代数多项式，因总可以通过坐标变换使积分区间为 $[-1,1]$，故不妨假设 $a=-1$，$b=1$，设 G_n 表示 n 阶高斯—勒让德积分公式，则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - G_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} L_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (f(x) - L_n(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ 是首系数为 1 的 $n+1$ 阶勒让德多项式. 由于 $f(x)$ 是 $2n+1$ 阶多项式，所以 $g(x)$ 是 n 阶多项式，由勒让德多项式的性质有

$$\int_{-1}^{1} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)g(x)\mathrm{d}x = 0 .$$

而 $f(x)$ 是高于 $2n+1$ 阶的多项式，$g(x)$ 是高于 n 阶的多项式，且

$$\int_{-1}^{1} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)g(x)\mathrm{d}x \neq 0 .$$

证毕.

例 1　计算 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　下表列出了本例复合辛普生积分中的有关参数.

n	h	$f_0(0)$	$f_1\left(\frac{1}{6}\right)$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$f\left(\frac{5}{6}\right)$	$f(1)$	s
3	$\frac{1}{6}$	1	0.97297	0.9	0.8	0.69231	0.59016	0.5	0.58540

即计算结果为

$$s = 0.58540 .$$

该积分的理论值为 arctan1，计算结果和理论值相当接近.

例 2　用 4 阶高斯—勒让德法积分计算 $\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解　4 阶高斯—勒让德法积分计算公式如下：

$$G = g_0 f_0(x_0) + g_1 f(x_1) + g_2 f(x_2) + g_3 f(x_3) + g_4 f(x_4) .$$

下表给出了本例的相关系数.

x_i	−0.9061798	−0.5384693	0	0.5384693	0.9061798
$f(x_i)$	1.0877109	1.1899126	1	1.1899126	1.0877109
g_i	0.236919	0.4786287	0.568889	0.4786287	0.2369269
$f_i g_i$	0.2577079	0.5695263	0.568889	0.5695263	0.2577079

计算结果为

$$G = 2.2233574\,.$$

本例只能算出近似值.

思　考　题

1．定积分应用的基本精神是什么？方法如何？
2．由 y 轴及平行于 x 轴的两直线所围成的面积用什么公式表示？
3．写出绕 y 轴旋转体的侧面积计算公式.

习　　题

1．计算下列方程所表示的曲线所围成的平面图形的面积.

（1）$y = x^2$，$x + y = 2$　　（2）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

（3）$y^2 = x^2(a^2 - x^2)$　　（4）$\begin{cases} x = a(t-\sin t) & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ y = a(1-\cos t) & a \neq 0 \end{cases}$

（5）$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$　　（6）$\rho = a(1+\cos\varphi)$

2．计算下列曲线的弧长.

（1）$y^2 = 2hx\ (a \leqslant x \leqslant b)$　　（2）$y = a\ln\dfrac{a^2}{a^2 - x^2}\ (0 \leqslant x \leqslant a)$

（3）$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} x = a\cos^4 t \\ y = a\sin^4 t \end{cases}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$

（5）$t = a\varphi\ (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, a \neq 0)$　　（6）$r = \dfrac{h}{1+\cos\varphi}\ (|\varphi| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, h \neq 0)$

3．计算 $y = \sin x$，$y = 0$ 绕 x 轴和绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

4．求下列曲线旋转后立体的侧面积.

（1）$x^2 + y^2 = R^2$，绕 x 轴旋转；　　（2）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴旋转；

（3）$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$，绕 x 轴旋转；　　（4）$r = a(1+\cos\varphi)\ (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$，绕极轴旋转.

5．求下列曲线重心的坐标.

（1）$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$；　　（2）$r = a(1+\cos\varphi)\ (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

6．定积分在物理和力学方面的应用：

（1）已知质点的运动速度为 $v = 2t + 4$ （cm/s），试求质点开始运动的 1 秒钟内所走的路程；

（2）把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处，需要做多大的功？

（3）挖一半球形的蓄水池，池深 20 m，求挖好这个池由于克服土块重力所做的功；

（4）一杆 AB 以角速度 $\omega = 10\,\pi/s$ 在一水平面上绕轴 oo' 旋转，杆的横截面 $S = 4\ \mathrm{cm}^2$，杆长 30 cm，密度为 $\rho = 7.8\ \mathrm{g/cm}^2$，求杆的动能．（$W = \dfrac{1}{2}J\omega^2$）

7．用复合辛普生公式计算如下积分的近似值．

（1）$\int_0^1 \dfrac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$，取 $n=4$　　（2）$\int_2^3 \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

8．用四阶高斯—勒让德积分计算下列积分的近似值．

（1）$\int_{-1}^1 \dfrac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$　　（2）$\int_2^3 \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

参 考 文 献

［1］吉林大学数学系．数学分析（上、中、下）[M]．北京：人民教育出版社，1978．

［2］樊映川．高等数学讲义（上、下册）[M]．北京：人民教育出版社，1958．

［3］格·马·菲赫金哥尔茨著．丁寿田译．数学分析原理（第一、二卷）[M]．北京：人民教育出版社，1962．

［4］华东师范大学数学系．数学分析（上、下册）[M]．北京：高等教育出版社，2001．

［5］同济大学应用数学系．高等数学（上、下册）[M]．北京：高等教育出版社，2001．

［6］同济大学数学教研室．高等数学习题集[M]．北京：高等教育出版社，1965．

［7］（俄）吉米多维奇著．费定晖，周学圣编演．数学分析习题集解[M]．济南：山东科学技术出版社，1980．

［8］郑阿奇，曹弋，赵阳．MATLAB 实用教程[M]．北京：电子工业出版社，2006．

［9］Gander, Walter/Hrebicek, Jiri. *Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and Matlab*[M]. Springer Verlag, 2005．